

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра автоматизації і управління в технічних системах**

«На правах рукопису»
УДК 681.5.03

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
Олександр РОЛІК
« » 20 р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра**

**за освітньо-науковою програмою «Інтегровані інформаційні системи»
зі спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»**

на тему: «Підвищення точності керування багатовимірними системами»

Виконав:

студент VI курсу, групи ІА-91мн
Гнип Владислав Віталійович

Керівник:

Доцент кафедри АУТС, к.т.н., доцент
Репнікова Наталія Борисівна

Консультант з назва розділу:

Рецензент:

Доцент кафедри АСОіУ, к.т.н., доцент
Жданова Олена Григорівна

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань.
Студент _____

Київ – 2021 року

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 103 с., 77 рис., 8 таблиць, 3 додатки, 17 джерел.

Об'єкт дослідження – багатовимірні системи керування. **Мета роботи** – забезпечення високої точності керування багатовимірними лінійними цифровими системами.

Методи наукових досліджень – аналіз, гіпотеза, моделювання, експеримент.

Результати. Приведені класифікації багатовимірних систем керування, критерії визначення їх якості, приведено методи-аналоги запропонованого вдосконаленого методу синтезу регуляторів. На основі методу синтезу регулятора Р.Ізермана запропоновано вдосконалений метод синтезу багатозв'язних цифрових систем керування.

Проведено експериментальні дослідження, для доведення роботоздатності методу для різнотипних багатовимірних цифрових систем, для знаходження особливостей синтезованих регуляторів. Показано приклад використання вдосконаленого методу для синтезу багатозв'язних цифрових систем з неквадратними матрицями входів та виходів.

Всі експериментальні дослідження проводились шляхом моделювання систем в прикладному пакеті MatLab/Simulink.

Наукова новизна одержаних результатів. Основний науковий результат дисертації полягає у розвитку методу синтезу багатозв'язних цифрових систем керування, який був запропонований Р. Ізерманом, а саме методу, який забезпечує підвищення точності результатів синтезу.

Рекомендації щодо використання результатів роботи. Результати даної роботи рекомендується використовувати для синтезу цифрових систем керування з заданими параметрами якості.

Ключові слова: ЦИФРОВІ СИСТЕМИ, БАГАТОВИМІРНІ СИСТЕМИ, ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ, ЦИФРОВИЙ РЕГУЛЯТОР СТАНІВ, МОДЕЛЬ ПРОСТОРУ-СТАНІВ, НЕКВАДРАТНІ МАТРИЦІ, МОДЕЛІ MATLAB.

ABSTRACT

Master`s dissertation: 103 p., 77 fig., 8 tables, 3 additions, 17 sources.

The object of studying - multidimensional control systems. **The purpose of the work** - to ensure high control accuracy of multidimensional linear digital systems.

Research methods - analysis, hypothesis, modeling, experiment.

Results. Given classifications of multidimensional control systems, criteria for determining their quality, methods-analogues of the proposed improved method of synthesis of regulators. Based on the method of synthesis of the controller of R. Iserman is proposed an improved method of synthesis of multi-connected digital control systems.

Experimental researches have been carried out to prove the efficiency of the method for various types of multidimensional digital systems, to find the features of the synthesized regulators. Shown example of the use of an advanced method for the synthesis of multi-connected digital systems with non-square matrices of inputs and outputs.

All experimental studies were performed by modeling systems in the MatLab/Simulink application package.

Scientific novelty of the obtained results. The main scientific result of the dissertation is the development of a method for the synthesis of multiconnected digital control systems, which was proposed by R. Iserman, namely a method that improves the accuracy of the synthesis results.

Recommendations for the use of work results. The results of this work are recommended for the synthesis of digital control systems with specified quality parameters.

Keywords: DIGITAL SYSTEMS, MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS, QUALITY IMPROVEMENT, DIGITAL STATUS REGULATOR, SPACE-STATE MODEL, NON-SQUARE MATRATES, MATLAB MODELS.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
1 ОПИС ТА ХАРАКТЕРИСТИКА БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ.	10
1.1 Класифікація систем керування.....	10
1.2 Аналіз методів переходу до векторно – матричних моделей багатовимірних систем керування.....	13
1.3 Аналіз багатовимірних систем керування	19
1.3.1 Керованість системи	20
1.3.2 Спостережуваність системи.....	22
1.3.3 Стійкість системи.....	23
1.3.4 Усталена похибка регулювання.....	23
1.3.5 Перерегулювання	24
1.3.6 Час перехідного процесу	25
1.4 Аналіз існуючих методів синтезу багатовимірних систем керування	26
1.4.1 Метод Сільвестра	27
1.4.2 Метод Бенджаміна Ч. Куо.....	34
1.4.3 Метод Р. Ізермана	38
Висновки до розділу 1	42
2 РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИНТЕЗУ БАГАТОВИМІРНОЇ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ	44
Висновки до розділу 2	49
3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ТА ПРАЦЕЗДАТНОСТІ ЗАПРОПОНОВАНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИНТЕЗУ БАГАТОВИМІРНОЇ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ.	50

Висновки до розділу 3.	59
4 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАТАМЕТРІВ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ НА ЯКІСТЬ ВИКОНАННЯ СИНТЕЗУ	61
4.1 Постановка задачі.....	61
4.2 Дослідження властивостей методу.....	61
4.2.1 Модель автономної системи	61
4.2.2 Модель багатозв'язної за станами системи.....	66
4.2.3 Модель багатозв'язної за станами, керуванням та виходом цифрової системи.....	68
4.3 Синтез багатовимірних систем з невідомим вектором станів.....	73
4.3.1 Об'єднаний регулятор автономної системи	74
4.3.2 Об'єднаний регулятор системи багатозв'язної за станами.	78
4.3.3 Об'єднаний регулятор системи багатозв'язної за станами, входами та виходами.	82
Висновки до розділу 4.	85
5 СИНТЕЗ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ З НЕКВАДРАТНИМИ МАТРИЦЯМИ	87
5.1 Огляд обмежень методу синтезу	87
5.2 Синтез багатовимірних систем керування з неквадратними матрицями керування та виходу.....	89
5.2.1 Модель автономної системи	89
5.2.2 Модель багатозв'язної за станами, входами та виходами системи.	93
Висновки до розділу 5	99
ВИСНОВКИ.....	101
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	102
ДОДАТОК А. Лістинг скрипту MatLab для синтезу запропонованого регулятора.	104

ДОДАТОК Б. Текст опублікованої статті з журналу «International Scientific Journal “Internauka”».	105
ДОДАТОК В. Текст опублікованих тез з конференції «Summer InfoCom Advanced Solutions 2021»	113

ВСТУП

На теперішній час широкого використання набув метод простору-станів. Як і інші методи представлення систем він дозволяє описувати об'єкти керування різних порядків за допомогою векторно-матричних рівнянь стану та виходу. Незважаючи на складність даного методу представлення систем він має ряд переваг, які на сьогодні спрощують синтез систем керування за рахунок комп'ютерних процедур обчислення, при цьому дозволяючи працювати з системою у цілому, як з єдиним об'єктом керування.

Актуальність даної роботи обумовлена тим, що пропонується розвиток методу синтезу цифрового регулятора зворотного зв'язку за станом, запропонованого Р.Ізерманом, шляхом впровадження додаткової матриці, що має вирішити головну проблему вказаного методу – прибрати усталену похибку регулювання, яка обмежувала його використання. Це дозволить розширити область застосувань даного методу синтезу, забезпечуючи високу якість перехідних процесів, так-як результуючий регулятор матиме всі позитивні сторони методу Р. Ізермана і при цьому буде позбавлений його недоліків.

Мета: забезпечення високої точності керування багатовимірними лінійними цифровими системами.

Для досягнення поставленої мети були вирішені наступні задачі:

- дослідження опису систем керування за допомогою методу простору-станів;
- визначення особливості багатовимірних систем керування;
- огляд і аналіз методики побудов систем керування з заданим розташуванням коренів;
- розроблення математичного апарату синтезу багатовимірних систем керування з нульовою усталеною помилкою;
- проведення експериментальних досліджень шляхом моделювання системи з використанням пакету MatLab/Simulink;

- узагальнити запропонований метод для синтезу багатовимірних систем з неквадратними матрицями.

Для вирішення поставлених задач використовувались наступні методи:

- метод простору станів;
- теорема Z-перетворення про кінцеве значення функцій;
- метод синтезу систем керування за заданим розташуванням коренів.

Результати досліджень, виконаних в магістерській дисертації, були підтверджені за допомогою моделювання з використанням програмного пакету Matlab/Simulink.

Об’єктом дослідження є багатовимірні цифрові системи керування, а **предметом** - підвищення якості багатовимірних систем керування.

Наукова новизна одержаних результатів.

Основний науковий результат дисертації полягає у розвитку методу синтезу багатозв’язних цифрових систем керування, який був запропонований Р. Ізерманом, а саме методу, який забезпечує підвищення точності результатів синтезу.

Практичне значення одержаних результатів

Практичний результат полягає в тому, що при залученні запропонованого методу забезпечується задана якість процесів керування.

Апробація результатів роботи

Основні результати дисертації обговорювалися на XI Міжнародній науково-практичній конференції Summer InfoCom Advanced Solutions, 13 травня 2021 року.

Публікації

За результатами досліджень опублікована стаття:

Репнікова Н. Б., Гнип В. В. Узагальнення умов виконання синтезу багатозв’язних систем керування з заданою якістю // Міжнародний науковий журнал "Інтернаука". — 2021. — №5.

1 ОПИС ТА ХАРАКТЕРИСТИКА БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

1.1 Класифікація систем керування

Існує досить багато ознак за якими класифікують системи керування, одна з яких, наприклад кількість виходів. За цією ознакою системи керування поділяються на одно- та багатовимірні системи. У даній роботі розглядаються багатовимірні системи керування [1], тому далі наведені потрібні для роботи класифікації таких систем.

Для багатовимірних систем керування існує наступний розподіл на підкласи:

- автономні.
- багатозв'язні.

Автономні системи або системи незв'язаного регулювання – системи керування у яких вхідні та вихідні змінні утворюють незалежні контури керування таким чином, що вхідна та вихідна змінна кожного каналу керування не залежать від змінних інших каналів керування.

Автономні системи є найпростішим варіантом багатовимірних систем і через це вони є дуже простими у керуванні. Модель простору-станів [2-3] таких об'єктів керування має вигляд (1.1).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

(1.1)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Багатозв'язні системи – системи керування у яких змінні стану та керування змінні можуть впливають на інші канали керування. Існують багатозв'язні системи за станом та за керуванням. Як можна зрозуміти, може бути виражена у зв'язках між станами системи, у зв'язках між входами системи та у зв'язках між виходами. Відповідно, якщо розглядати систему, що включає всі описані типи багатозв'язності, то (1.1) можна переписати у вигляді (1.2), врахувавши всі можливі зв'язки між каналами.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Іншою важливою для роботи класифікацією систем керування є розподіл на безперервні та цифрові системи керування.

Аналогові системи керування, або, як вони ще називаються, «безперервні»[4] - це системи, в яких сигнали передаються неперервно у часі і сам сигнал є неперервним за рівнем.

Системи такого типу будуються з використанням лише аналогових елементів і зазвичай такі системи є дуже складними в описанні через велику кількість складових. Важливо відмітити, що систему не можна назвати неперервною, якщо в ній присутній хоча б один цифровий елемент.

Перехідні процеси в неперервних системах мають вигляд, як на рисунку 1.1.

Якщо говорити про переваги систем керування такого типу, то головною їх перевагою є неперервність процесів вимірювання вихідної величини. Таким чином в будь-який момент часу вихідна величини може бути оцінена та вироблене таке керування, яке може відкоригувати роботу системи. За рахунок вказаної переваги

виплаває і інша перевага неперервних систем керування над цифровими, а саме: якість перехідних процесів. Якість перехідних процесів стає кращою за рахунок постійної роботи регулятора і більш точного в такому випадку керування.

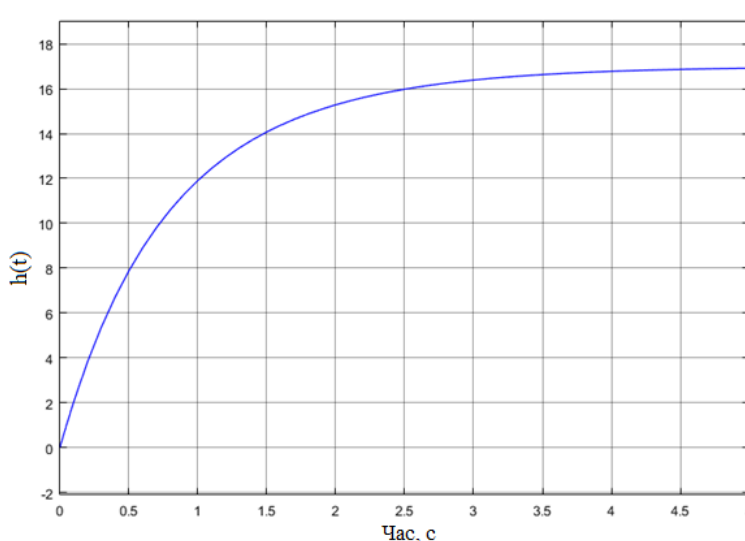


Рисунок 1.1 – Вигляд неперервного у часі перехідного процесу.

Незважаючи на переваги неперервних систем, вони мають все-ж більше недоліків. Вони є більш складними в реалізації, а через складність реалізації виростає їх вартість.

На відміну від неперервних систем цифрові системи керування відрізняються тим, що в них можуть бути присутні не лише цифрові сигнали, а і цифрові з аналоговими. Різноманіття цифрових засобів дало поштовх до використання таких систем керування у будь-яких сферах.

Цифрова система керування [5] – система керування в склад якої входить хоча б один цифровий елемент.

На відміну від безперервних систем, в цифрових сигнали не є визначеними на усьому проміжку часу, але вони відомі у певні моменти часу – такти квантування сигналу. Для наочності на рисунку 1.2 представлено зовнішній вигляд перехідних процесів у цифрових системах.

З рисунку 1.2 відразу можна виділити головний недолік цифрових систем: у проміжок часу між тактами квантування стан системи є невизначеним, а отже нею не

можна керувати в ці проміжки часу і потенційно система за період квантування може стати нестійкою і вийти з ладу.

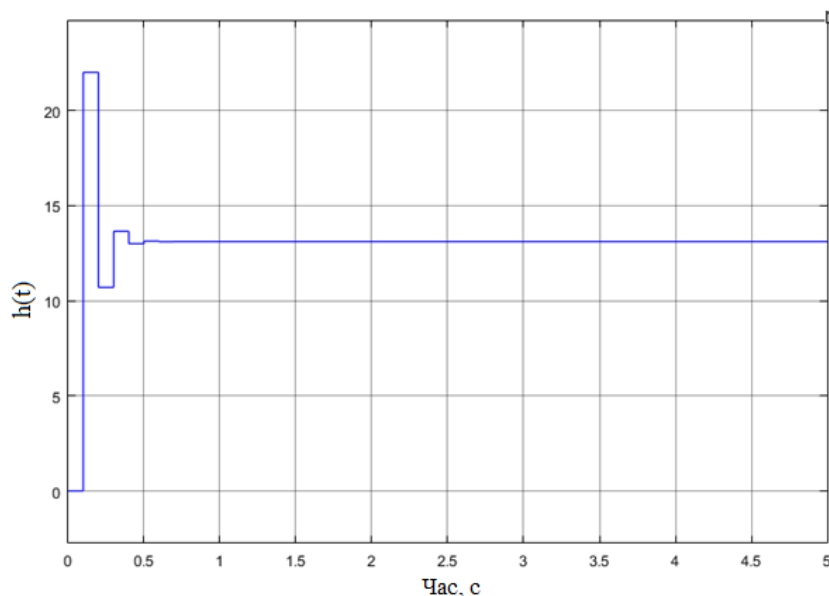


Рисунок 1.2 - Вигляд квантованого за часом перехідного процесу.

1.2 Аналіз методів переходу до векторно – матричних моделей багатовимірних систем керування.

Важливою річчю при побудові систем керування будь-якої складності є вибір правильного методу представлення об'єкту керування. Зазвичай робота з об'єктом керування напряду є неможливою, тому для синтезу систем керування сам об'єкт замінюється його моделлю, яка зазвичай має певне математичне представлення. Серед основних способів математичного представлення об'єкту керування можна виділити два: за допомогою передавальних функцій та за допомогою методу простору станів.

Використання будь-якого з вказаних вище методів не є можливим без підготовчого етапу побудови моделі – опису динаміки об'єкту керування.

Динаміка об'єктів керування описується за допомогою диференціальних рівнянь різних порядків. Є кілька способів запису динаміки об'єкту за допомогою диференціальних рівнянь [6].

Першим і початковим способом запису є пряма форма запису диференційного рівняння у вигляді поліному n -го порядку.

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = \\ = b_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_n x(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Другий спосіб запису рівняння – запис у операторній формі, котра часто використовується в теорії автоматичного управління, коли відбувається заміна операції диференціювання – операторною змінною $p^n \equiv \frac{d^n}{dt^n}$.

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n) x(t) \quad (1.4)$$

Формула (1.3), перший варіант запису динаміки об'єкту використовується для опису динаміки фізичних процесів, що проходять при його роботі. Формула (1.4) – форма запису рівняння (1.3), що використовується для спрощення математичних викладок. Фактично, формули (1.3) та (1.4) ідентичні, при цьому нова змінна p розглядається як співмножник без права перестановки, тобто $py(t) \neq y(t)p$.

При використанні перетворення Лапласа (1.5) до формули (1.4) відбувається перехід від операторної форми запису рівняння до операційного числення (1.6) таким чином, що змінна для позначення операції диференціювання p перетворюється на комплексну змінну, а замість оригіналів функцій часу об'єкту керування (ОК) $x(t)$ та $y(t)$ використовуються їх зображення $Y(p)$ та $X(p)$.

$$x(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad (1.5)$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) Y(p) = (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n) X(p) \quad (1.6)$$

На перший погляд хоча формули (1.4) та (1.6) є ідентичними, але їх не можна плутати, хоча б з тієї причини, в (1.4) фігурують функції часу, а в (1.6) їх зображення [6]. За допомогою рівнянь вигляду (1.3), (1.4) та (1.6) можна записати динаміку одновимірного ОК, але для багатовимірних використовуються системи лінійних диференціальних рівнянь. Після опису динаміки об'єкту керування можна переходити до побудови математичних моделей ОК, робота з якими матиме простіший математичний апарат, ніж робота з системами диференціальних рівнянь.

Як було вказано раніше є два методи опису багатовимірних систем. Метод опису за допомогою передавальних функцій та за допомогою представлення об'єкту керування у просторі-станів. Розглянемо спершу метод з використанням передавальних функцій.

Передавальна функція [7] – відношення зображення виходу до зображення входу при нульових початкових умовах.

Виходячи з визначення передавальної функції, зрозуміло, що з її допомогою можливо представити лише відношення зображення одного виходу до зображення одного входу. Багатовимірні системи мають декілька каналів керування і відповідно до визначення багатовимірних систем – кілька входів та кілька виходів. Для опису багатовимірного об'єкту однієї передавальної функції не достатньо, тому використовуються не просто функції, а їх матриці (1.7).

$$W_c(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1r}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{l1}(s) & \dots & W_{rl}(s) \end{pmatrix} \text{ або } W_c(z) = \begin{pmatrix} W_{11}(z) & \dots & W_{1r}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{l1}(z) & \dots & W_{rl}(z) \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

де r - кількість входів системи, l – кількість виходів системи.

Матрицею передавальних функцій можна представити як аналогову систему, так і цифрову і таким чином описати об'єкт моделювання.

Проблеми даного методу опису з'являються зі збільшенням порядку системи. При збільшенні порядку системи до третього передавальні функції мають в знаменнику характеристичні поліному третього порядку і ними вже дуже важко

оперувати. Схеми моделювання в прикладному пакеті MatLab/Simulink стають дуже громіздкими, з великою кількістю зв'язків між передавальними функціями.

Як альтернатива вказаному способу опису системи за допомогою передавальних функцій почали використовувати метод простору станів [2]. Даний метод опису системи базується на використанні не операторної форми рівнянь динаміки системи, а векторно-матричній.

Перевагою даного методу запису динаміки системи є:

- використання комп'ютерних процедур обчислення.
- зручний опис багатовимірних систем.

При розгляді методу простору станів варто означити поняття «змінної стану» об'єкту керування.

Змінні стану [3] – це деякі змінні $x_1(t)$, $x_2(t)$... $x_n(t)$, які при наявності їх початкових значень $x_1(0)$, $x_2(0)$... $x_n(0)$ та вхідного впливу на систему $u(t)$ дають можливість однозначно визначити подальшу поведінку розглядуваної системи.

Відповідно в кожен момент часу маючи набір змінних станів можна визначити «стан» об'єкту керування.

Стан об'єкту керування [3] – набір змінних стану $x_1(t)$, $x_2(t)$... $x_n(t)$ в певний момент часу, що визначають положення системи в деякому n – вимірному просторі.

Математично, модель об'єкту керування у просторі-станів описується наступною системою рівнянь у випадку безперервної лінійної системи:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

де $\dot{\mathbf{x}}(t)$ – похідна вектору станів об'єкту керування, $\mathbf{y}(t)$ – вектор виходу системи, $\mathbf{u}(t)$ – вектор входу системи, \mathbf{A} – матриця станів системи, \mathbf{B} – матриця керуючих впливів, \mathbf{C} – матриця виходів, \mathbf{D} – матриця прямого зв'язку.

Математика, покладена в основу методу простору станів є такою, що динаміка ОК описується системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. У зв'язку з цим, при побудові математичної моделі, коефіцієнти при змінних у

рівняннях формують вказані після формули (1.8) матриці моделі простору станів **A**, **B**, **C**, **D**. Матриці моделі мають між собою зв'язки розмірностей матриць, так за основу обирається матриця **A**, вона має бути завжди квадратною оскільки позначає зв'язки між внутрішніми станами об'єкту керування. Матриця **B** повинна мати кількість стрічок такою, як і у матриці **A**, бо пов'язує вплив входів системи на стани ОК. В матриці **C** має бути стільки ж стовбців скільки станів, бо дана матриця пов'язує стани ОК з виходами системи. Остання матриця моделі **D** зв'язує входи систем з виходами і через це вона повинна мати кількість стрічок, як в матриці **C**, а кількість стовбців. Як в матриці **B**. Зручніше зобразити даний взаємозв'язок графічно [3] , рисунок 1.3.

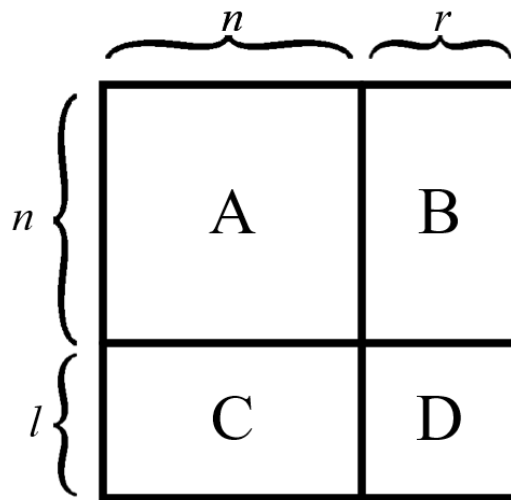


Рисунок 1.3 – Графічне зображення розмірностей матриць моделі простору станів.

Якщо розписати формулу (1.8) більш детально, можна отримати наступне.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_l(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{l1} & d_{l2} & \dots & d_{lr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.9)$$

Структурно модель простору станів безперервної лінійної системи виглядає, як на рисунку 1.4.

Цифрові моделі простору станів [5] систем мають дещо інший вигляд за рахунок їх оперування не часом, а тактами квантування сигналу. Математична модель (1.10) виглядає дуже схоже, але має деякі відмінності.

$$\begin{cases} \mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n] \\ \mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n] \end{cases}, \quad (1.10)$$

В якості аргументу для розрахунку подальших станів об'єкту керування використовуються значення стану на попередньому такті квантування. Виходячи з цього можна дати нове визначення вектору станів для цифрової системи керування.

Вектор станів цифрового об'єкту керування – це вектор змінних стану $x_1[n]$, $x_2[n]$... $x_n[n]$, що зберігають значення стану системи з попереднього такту квантування і дозволяють однозначно визначити стан системи у наступний такт квантування.

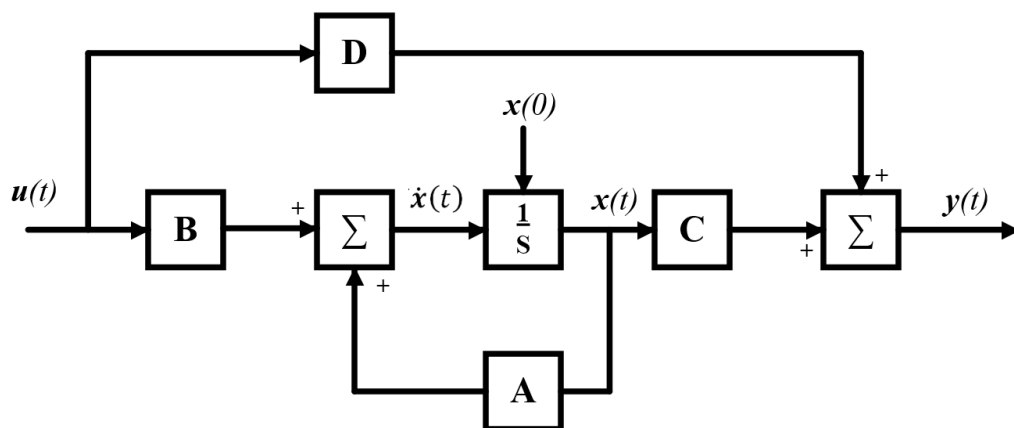


Рисунок 1.4 – Структурна схема моделі простору станів безперервної лінійної системи.

Кожен такт роботи моделі дозволяє вирахувати за допомогою відомих станів ОК вектор майбутніх станів та вихідні значення системи. Структурна модель простору станів для цифрових систем, рисунок 1.5, є на перший погляд аналогічною до представленої на рисунку 1.4, але в ній використовуються інші блоки.

Структурна схема на рисунку 1.5 відрізняється від представленої на рисунку 1.4 тим, що замість інтегруючої ланки безперервних систем використовується блок затримки на один такт.

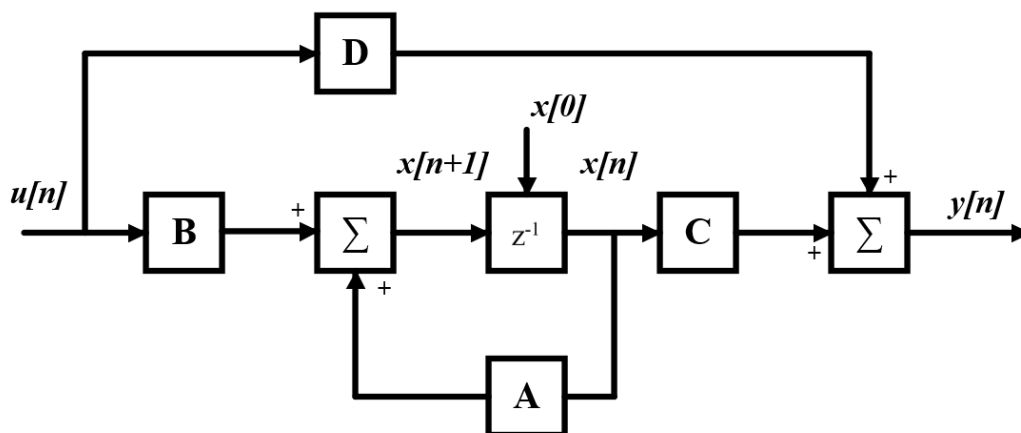


Рисунок 1.5 – Структурна схема моделі простору станів цифрової лінійної системи.

1.3 Аналіз багатовимірних систем керування

Аналіз системи керування є важливим етапом процесу синтезу. Побудова моделі об'єкту керування дозволяє виконувати як аналіз стійкості, так і аналіз якості досліджуваної системи. Отримання показників якості дозволяє виконати оцінку роботи системи в перехідному та усталеному режимах. В деяких випадках аналіз якості дозволяє отримати такий результат, що система не потребує регулювання взагалі і можна відмовитись від синтезу регулятора повністю.

До параметрів якості систем керування можна віднести: час перехідного процесу, перерегулювання та усталену похибку регулювання. Для систем описаних за допомогою моделі простору-станів існує ще два важливих показники: керованість та спостережуваність.

Перший набір параметрів дає повне уявлення про якість перехідного процесу системи.

Варто відзначити, що ще одним параметром, який впливає на систему є час квантування, але цей параметр справедливий лише для цифрових систем керування.

Далі в даному розділі будуть окремо описані та розглянуті кожен зі вказаних параметрів якості системи. Будуть вказані шляхи їх знаходження по вихідним графікам моделі ОК.

1.3.1 Керованість системи

Для об'єктів керування представлених у вигляді моделі простору станів можливо знайти ще один параметр, який не можна віднести до параметрів якості напрямку, але він дозволяє отримати ключову інформацію про об'єкт керування ще до початку побудови регулятора і взагалі визначити чи можливо це зробити.

Керованість – властивість об'єкту керування бути переведеним з будь-якого початкового стану в будь-який кінцевий стан за обмежений проміжок часу за умови відсутності обмежень на керування.

Тобто дана властивість визначає чи можливо взагалі керувати ОК так, як потрібно для досягнення певного вихідного значення. Якщо при дослідженні керованості ОК отриманий результат негативний, то можна зробити висновок про те, що система некерована взагалі і регулятор не зможе впливати на неї так, щоб отримати потрібне вихідне значення, або ж система не буде адекватним чином реагувати на завдання і на керуючі впливи регулятора.

Для визначення керованості системи потрібно знайти матрицю керованості, яка формується з матриць моделі простору станів **A** та **B**, а потім знайти ранг цієї матриці. Також можна визначити керованість системи перевіривши лінійну незалежність стовбців матриці керованості. Формула (1.11) використовується для знаходження матриці керованості.

$$P = [B, AB, A^2B, \dots, A^{(n-1)}B] \quad (1.11)$$

Замість розрахунків матриці керованості вручну можна використовувати програмний пакет MatLab, який має вбудовану базу команд і одна з них дозволяє за допомогою однієї команди знайти матрицю керованості, наприклад для наступних матриць **A** та **B** (1.12).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 12 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & -11 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

```
>> P = ctrb(A,B)
```

```
P =
```

```

2      0      0     10      2     24     -26     292     166
0     -2      0      4    -18      2      50    -136      70
0      0      2     -6     22      4     -86     236     -86
```

Рисунок 1.6 – Знаходження матриці керованості за допомогою програмного пакету MatLab.

З рисунку 1.6 можна побачити, що всі стовбці матриці керованості \mathbf{P} є лінійно незалежними, тому можна зробити висновок, що система для якої розраховувалась матриця керованості є стійкою.

Можна скористатись також командою `rank(P)`, рисунок 1.7, в тому ж середовищі MatLab, щоб визначити ранг матриці керованості. Якщо ранг матриці буде рівний порядку системи, то з цього можна зробити висновок, що система керована.

```
>> rank(P)
```

```
ans =
```

```
3
```

Рисунок 1.7 – Визначення рангу матриці за допомогою програмного пакету MatLab.

На жаль говорити про керованість системи можна лише у випадку, якщо система лінійна. Нелінійні системи поведуться надто непередбачувано, наприклад при подачі нульового входу нелінійні системи можуть давати ненульовий вихід.

1.3.2 Спостережуваність системи

Спостережуваність системи – друга за важливістю властивість системи. Як і керованість цей параметр не можна віднести до параметрів якості систем керування, але спостережувана система дозволяє у майбутньому після отримання матриць регулятора побудувати об'єднаний регулятор, який дозволяє реалізувати систему керування об'єктом через один блок, а не через декілька.

Спостережуваність – властивість системи, вектор станів якої можна відновити за допомогою векторів вхідних та вихідних впливів. На кінцевому інтервалі часу можна визначити однозначно початковий стан системи.

Якщо розглянути це з точки зору побудови регуляторів, то якщо система не спостережувана, то для неї неможливо буде відновити вектор станів і відповідно не можна буде нею керувати на практиці. Реальні ОК дуже рідко мають можливість отримати вектор їх станів напряду і для систем такого типу не можна використовувати регулятор.

Аналогічно як і для керованості в середовищі MatLab існує ще одна вбудована функція, яка дозволяє розрахувати матрицю спостережуваності системи за допомогою матриць A та C системи. В функції реалізована формула (1.13).

$$H = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{(n-1)} C^T] \quad (1.13)$$

Використання згадуваної формули для матриць (1.14) показано на рисунку 1.8.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 12 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & -11 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Аналогічно, як і з керованістю, знайшовши ранг матриці спостережуваності можна судити про спостережуваність системи, якщо ранг системи рівний порядку системи, то система є спостережуваною.

```
>> Hobs = obsv(A,C)

Hobs =

    -3         0         0
     0         1         0
     0         0         9
   -15         3        -36
     2         9         1
   -27        -99        18
    39        438       -249
    25         68         35
   -387       -1062       -387
```

Рисунок 1.8 – Знаходження матриці спостережуваності за допомогою програмного пакету MatLab.

1.3.3 Стійкість системи

Стійкість системи [8] – це здатність системи нормально функціонувати під дією збурюючих впливів та протистояти ним. Систему можна назвати стійкою, якщо під дією збурення відхилення від поставленого завдання є малим, або якщо після припинення дії збурення система повертається до усталеного значення.

В даній роботі мова ведеться про цифрові системи тому доцільно дати визначення умови стійкості цифрових систем керування.

Цифрові системи схожими з безперервними відносно методів, які можна до них застосувати. Для цифрових систем умова стійкості лишається основою на коренях характеристичного рівняння. Змінилася лише умова стійкості:

Для того, щоб цифрова система була стійкою необхідно і достатньо, щоб корені характеристичного рівняння системи знаходились в колі одиничного радіуса, див формулу (1.15).

$$|z_i| \leq 1 \quad (1.15)$$

1.3.4 Усталена похибка регулювання

Усталена похибка регулювання – це один із головних параметрів якості системи, оскільки позначає різницю регульованого параметру від заданого значення до фактичного. Похибка регулювання визначається за формулою (1.16).

$$\varepsilon(t) = x(t) - y(t), \quad (1.16)$$

де $x(t)$ – задаючий вплив, $y(t)$ – регульована величина.

Для забезпечення високої точності регулювання необхідно, щоб $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для визначення похибки системи можна використовувати графік перехідного процесу. Отримання значення усталеної похибки регулювання показано на рисунку 1.9.

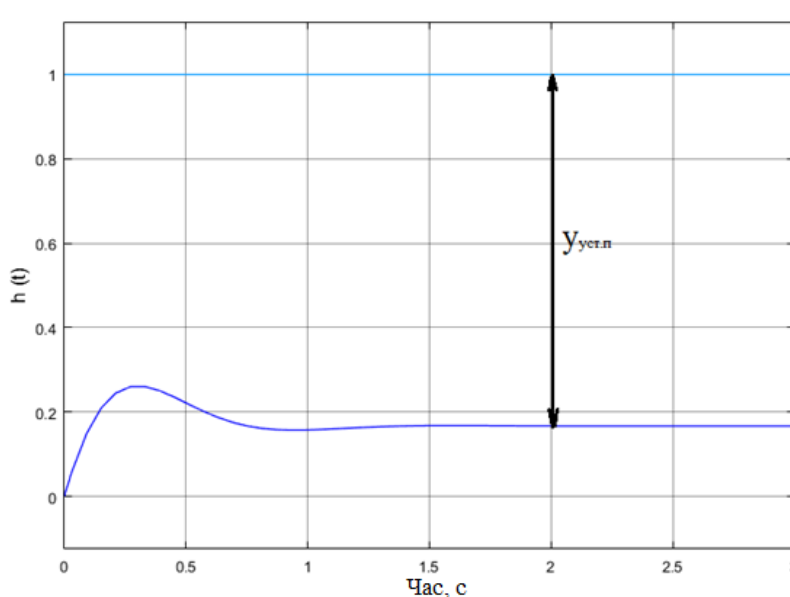


Рисунок 1.9 – Визначення значення усталеної похибки регулювання графічним способом.

На рисунку 1.9 видно 2 графіка, верхній графік – це задання, яке подається на вхід системи. Синій графік – це вихідне значення системи керування і відповідно різниця між вхідним впливом та встановленим статичним значенням виходу дає встановлену похибку регулювання, відповідно до формули (1.16).

1.3.5 Перерегулювання

Перерегулювання – це параметр якості системи, який показує максимальне відхилення значення виходу системи від значення його кінцевого стану рівноваги. Як

можна зрозуміти це відносний показник, тому він розраховується відносно усталеного значення виходу системи.

Для знаходження цього параметру потрібно зафіксувати максимальне значення системи на проміжку встановлення її значення та знайти усталене значення вихідного параметру системи. Шукати ці параметри зручно графічно, як на рисунку 1.10.

Маючи визначені значення потрібно скористатись формулою (1.17) та знайти значення перерегулювання для заданої системи.

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{\text{уст}}}{y_{\text{уст}}} 100\% \quad (1.17)$$

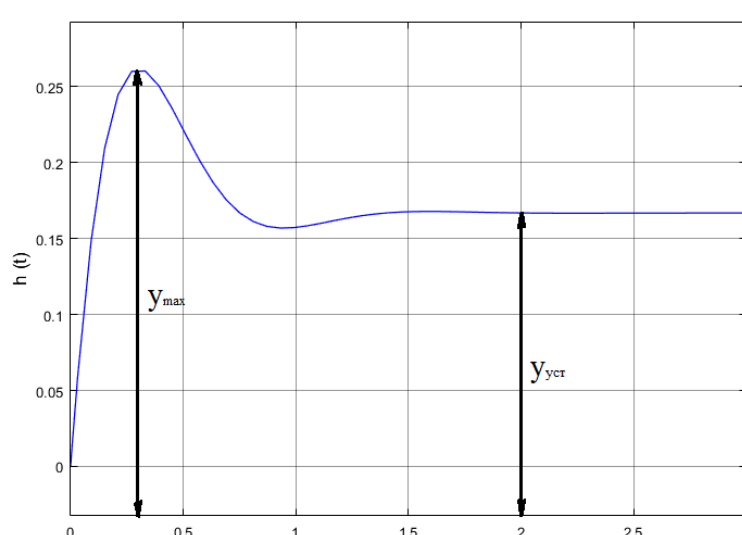


Рисунок 1.10 – Визначення максимального та усталеного значення графіку вихідної функції.

1.3.6 Час перехідного процесу

Час перехідного процесу – це час від подачі на вхід системи сигналу до моменту, коли вихідне значення системи наближається до завдання, або до усталеного значення так, що графік виходу системи знаходиться в стані рівноваги і відрізняється від цього значення не більше, ніж на $\pm 5\%$.

Знаходити значення часу перехідного процесу зручно також графічно, його продемонстровано на рисунку 1.11.

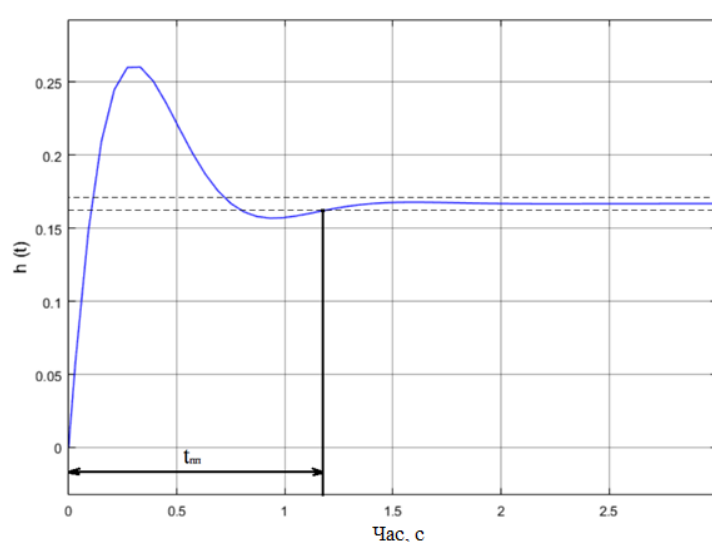


Рисунок 1.11 – Визначення часу перехідного процесу.

Варто відзначити, що якщо завдання системи було нульовим і усталене значення також нульове, то за основу для отримання «тунелю» з якого система не виходитиме і дасть можливість отримати значення часу перехідного процесу, можна використовувати значення перегулювання.

1.4 Аналіз існуючих методів синтезу багатовимірних систем керування

Синтез регулятора – це процес визначення структури майбутнього регулятора та його моделі таким чином, щоб він вирішував поставлену інженерну задачу. Тобто задовольняв двом головним вимогам: щоб вихід ОК мав задані показники якості перехідного процесу, а з іншого боку, щоб система мала достатню точність регулювання вихідних параметрів.

Задача синтезу регулятора перш за все полягає у визначенні його структури. Оскільки в роботі пропонується метод синтезу регулятора цифрових багатовимірних систем зі структурою, з використанням зворотного зв'язку за станом, то логічно розглядати методи-аналоги, що використовують аналогічний принцип регулювання.

Серед таких можна привести у приклад наступні методи синтезу цифрових регуляторів багатовимірних систем: з використанням рівняння типу Сільвестра, метод синтезу запропонований Бенджаміном Ч. Куо та метод запропонований Р.Ізерманом.

Вказані методи призначені для синтезу цифрових багатовимірних регуляторів для систем різного порядку та складності, при цьому математичний апарат цих методів відрізняється один від одного.

Далі в даному розділі описано математичний апарат згаданих методів-аналогів, приклади обчислення матриць регуляторів зворотного зв'язку та результати моделювання в пакеті MatLab/Simulink систем з регуляторами.

1.4.1 Метод Сільвестра

Для синтезу багатовимірних систем керування використовують рівняння Сільвестра, яке вирішує задачу отримання матриці зворотних зв'язків за станом, з подальшим синтезом регулятора, який розв'язує канали керування, тобто знищує впливи одного каналу на інший. Моделі систем, які використовуються у даному методі будуються на математичній платформі методу простору станів.

Метод Сільвестра [9-10] – це метод розрахунку математичної моделі регулятора для ОК, що базується на розв'язанні рівняння типу Сільвестра. Існує кілька типів регуляторів, які представлені різними авторами, що використовують математичний апарат рівняння Сільвестра для пошуку матриці зворотного зв'язку. Всі ці типи об'єднує використання цього методу для безперервних систем та можуть бути адаптовані і для цифрових систем керування [5]. Для даної роботи доцільно описати адаптацію даного методу.

В загальному вигляді рівняння Сільвестра має вигляд (1.18).

$$\bar{M}\bar{\Gamma} - \bar{A}\bar{M} = \bar{B}\bar{H}, \quad (1.18)$$

де **M** – допоміжна матриця, **Г** – матриця еталонної моделі, **H** – невизначений множник.

За такого вигляду матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом системи описується формулою (1.19).

$$K = -HM^{-1}, \quad (1.19)$$

де \mathbf{K} – матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом, \mathbf{M} – допоміжна матриця, \mathbf{H} – невизначений множник.

В адаптації методу пропонується використати рівняння типу Сільвестра не в кінцевому вигляді, а використати формулу для синтезу матриці замкнутої систем з бажаним спектром, яка дозволяє отримати матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом (1.20).

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma}) = \mathbf{K} \quad (1.20)$$

Для корегування виходу системи пропонується використовувати матрицю корегувальних коефіцієнтів (1.21).

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma} \quad (1.21)$$

Регулятор, що синтезується за допомогою формул (1.20) та (1.21) повинен не лише забезпечувати задані показники якості вихідної системи, але й відсутність усталеної похибки регулювання.

Матриця еталонної моделі системи має вигляд (1.22) і є ідентичною до оригінальної.

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{E}_n, \quad (1.22)$$

де λ – бажаний корінь системи, \mathbf{E}_n – одинична матриця.

Схема моделювання роботи синтезованого регулятора має вигляд, як на рисунку 1.12.

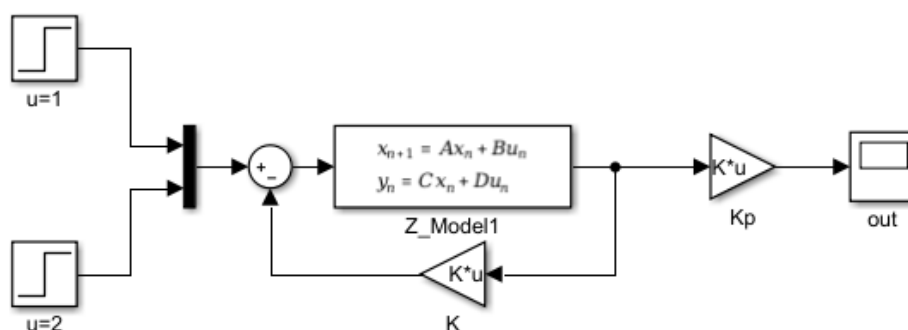


Рисунок 1.12 – Схема моделювання синтезованого регулятора.

Для даної адаптації методу Сільвестра вказано, що для даного методу немає чітких рекомендацій визначення параметри еталонної моделі, тому вибір параметрів еталонної моделі доводиться виконувати кожному досліднику самостійно, наприклад за допомогою алгоритмів MatLab.

Для демонстрації методу та формул, які використовуються, виконаємо синтез багатовимірної системи для об'єкта керування, який описується наступними матрицями:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

Для моделювання будемо використовувати модель, як представлена на рисунку 1.12 з вхідними впливами, 1 та 2 відповідно.

Виконаємо моделювання вихідної системи та отримаємо графік перехідного процесу, який представлено на рисунку 1.13.

З рисунку 1.13 видно, що початкова система є нестійкою, потрібно виконати синтез регулятора, який виконував дві функції: стабілізацію системи та забезпечив високу якість регулювання.

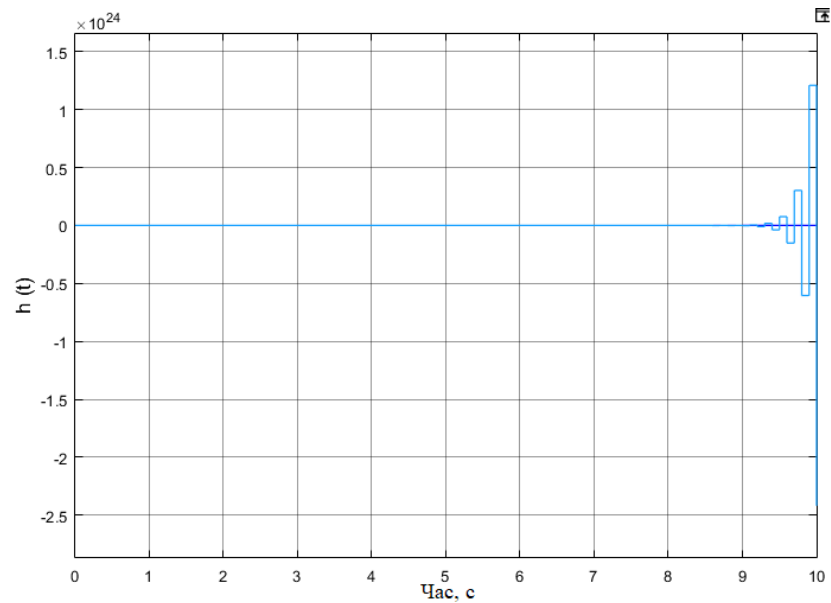


Рисунок 1.13 – Перехідний процес досліджуваної системи.

Використовуємо формули (1.20) та (1.21) для синтезу регулятора попередньо задавши еталонну матрицю системи з коефіцієнтами 0.7.

```
>> G = 0.7*eye(2)

G =

    0.7000    0
         0    0.7000

>> K1 = inv(B1)*(A1-G)

K1 =

   -0.8500    0
         0   -0.9000

>> Kg1 = inv(B1)*G

Kg1 =

    0.3500    0
         0    0.2333
```

Рисунок 1.14 – Синтезований регулятор.

Перевіряємо роботу синтезованого регулятора з рисунку 1.14, підставивши розраховані матриці до блоків схеми з рисунку 1.12. результат роботи схеми представлено на рисунку 1.15.

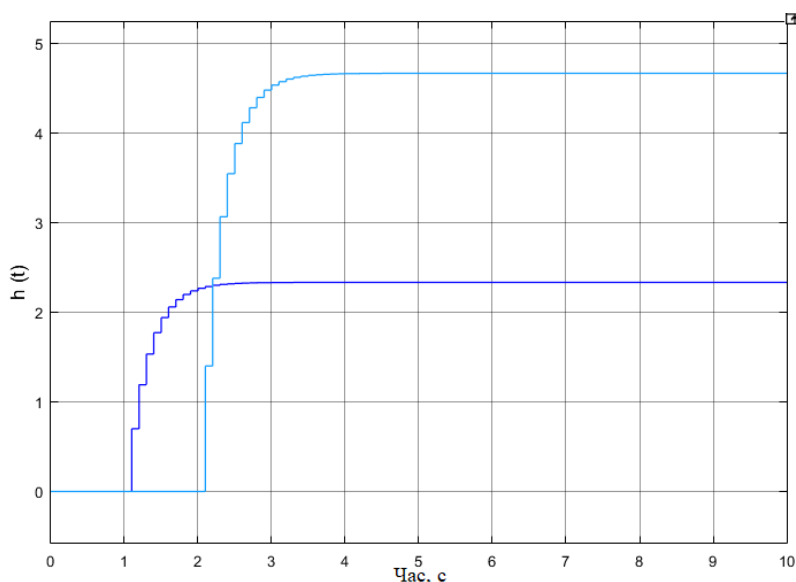


Рисунок 1.15 – Графіки виходу схеми моделювання.

Варто відмітити, що робота регулятора є досить помітною навіть без вірно підбраної еталонної моделі: система стабілізована, час перехідного процесу є відносно малим, при цьому перерегулювання немає.

Спробуємо зменшити коефіцієнти в еталонній матриці системи, до 0.5. Результати показані на рисунку 1.16.

```
>> G = 0.5*eye(2)

G =

    0.5000    0
         0    0.5000

>> K1 = inv(B1)*(A1-G)

K1 =

   -0.7500    0
         0  -0.8333

>> Kg1 = inv(B1)*G

Kg1 =

    0.2500    0
         0    0.1667
```

Рисунок 1.16 – Синтезований регулятор зі зменшеними коефіцієнтами.

Перевіряємо роботу синтезованого регулятора, підставивши розраховані матриці до блоків схеми з рисунку 1.12. результат роботи схеми представлено на рисунку 1.17.

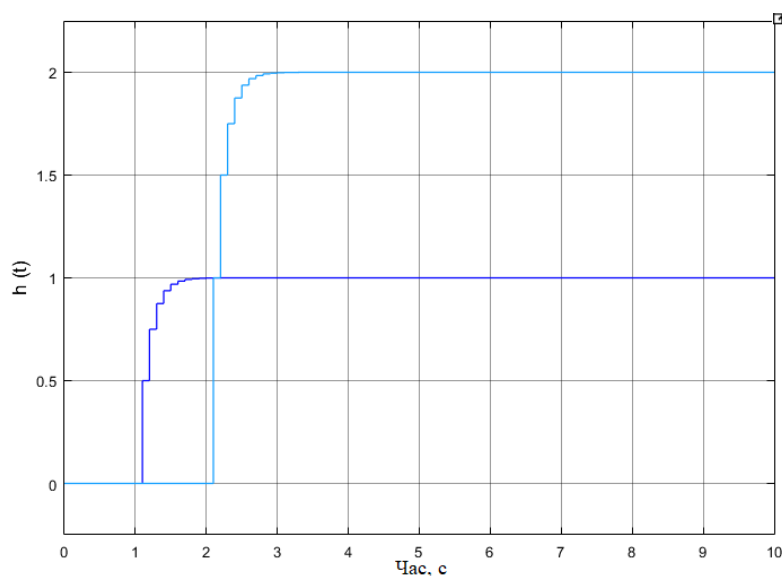


Рисунок 1.17 – Графіки виходу схеми моделювання.

Нова еталонна модель значно покращила якість вихідних графіків. Перерегулювання все ще відсутнє, час перехідного процесу зменшився, усталена похибка регулювання зникла. Результат покращився.

Оскільки зменшення коефіцієнтів дало зменшення часу перехідного процесу можна спробувати ще більше зменшити коефіцієнти еталонної моделі, наприклад до значення 0.1. Результат синтезу показано на рисунку 1.18.

```
>> G = 0.1*eye(2)

G =

    0.1000    0
         0    0.1000

>> K1 = inv(B1)*(A1-G)

K1 =

   -0.5500    0
         0   -0.7000

>> Kg1 = inv(B1)*G

Kg1 =

    0.0500    0
         0    0.0333
```

Рисунок 1.18 – Синтезований регулятор зі зменшеними коефіцієнтами.

Перевіряємо роботу синтезованого регулятора, підставивши розраховані матриці до блоків схеми з рисунку 1.12. результат роботи схеми представлено на рисунку 1.19.

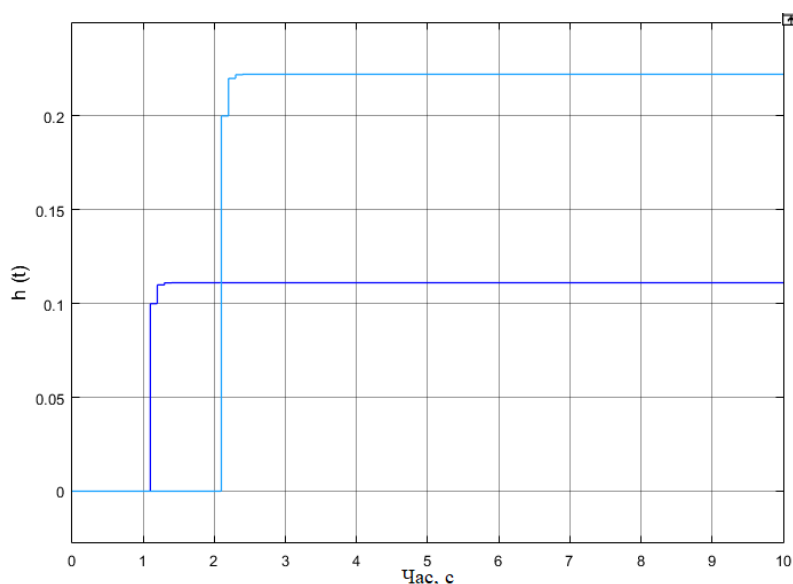


Рисунок 1.19 – Графіки виходу схеми моделювання.

Незважаючи на установлену раніше тенденцію, зменшення коефіцієнтів еталонної моделі не призвело до покращення результату, хоч час перехідного процесу і зменшився, як очікувалося, знову з'явилася усталена похибка регулювання, і відповідно якість системи погіршилася у порівнянні з другою спробою підбору.

Будемо вважати, що ідеальними коефіцієнтами є значення 0.5 (для цього конкретного прикладу), за таких значень система чітко відпрацьовує поставлене завдання при цьому має потрібні показники якості.

Як висновок, слід підкреслити наступне. Розв'язок рівняння Сільвестру, який забезпечив отримання матриці зворотного зв'язку за станом у попередніх прикладах демонстрував синтез багатовимірної автономної системи, де стани системи не впливали один на одного. Задача ускладнюється, коли розглядається синтез багатозв'язних систем з заданою якістю і потрібно вирішувати проблему підвищення точності.

1.4.2 Метод Бенджаміна Ч. Куо

Серед методів розрахунку цифрових регуляторів існують декілька методів, які запропоновані Бенджаміном Ч. Куо у [11]. Наприклад метод, в якому використовуються зворотні зв'язки за станом та динамічний зв'язок за виходом, для керування системою.

Метод є відносно складним, оскільки вимагає досить великої кількості обчислень і до того ж працює лише для моделей автономних систем. Метод не дозволяє розв'язати стани об'єкту керування і якщо системи є багатозв'язною потрібно використовувати допоміжні методики для синтезу систем керування.

Алгоритм синтезу регулятора даним методом має наступні кроки:

- 1) визначення керованості та спостережуваності системи;
- 2) знаходження розширених матриць системи;
- 3) задання бажаних характеристичних поліномів;
- 4) визначення матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку;
- 5) синтез матриць регулятора.

Завдяки комп'ютерним методам обчислень, синтез регуляторів за допомогою цього методу значно спрощується. У пункті 3 задання бажаних характеристичних поліномів зазвичай відбувається за допомогою передавальних функцій системи, які можна досить легко виділити для кожного каналу і відповідно за допомогою блоку Check Step Response Characteristics програмного пакету MatLab Simulink можна досить швидко знайти корені і сам характеристичний поліном.

Для демонстрації методу та формул, які використовуються в ньому представлено процес синтезу регулятора для простої багатовимірної системи представленої у якості формули (1.24).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1.384 & 0 \\ 0 & -0.4687 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

Виконаємо моделювання вихідної системи та проаналізуємо отримані графіки перехідних процесів, які представлені на рисунку 1.20.

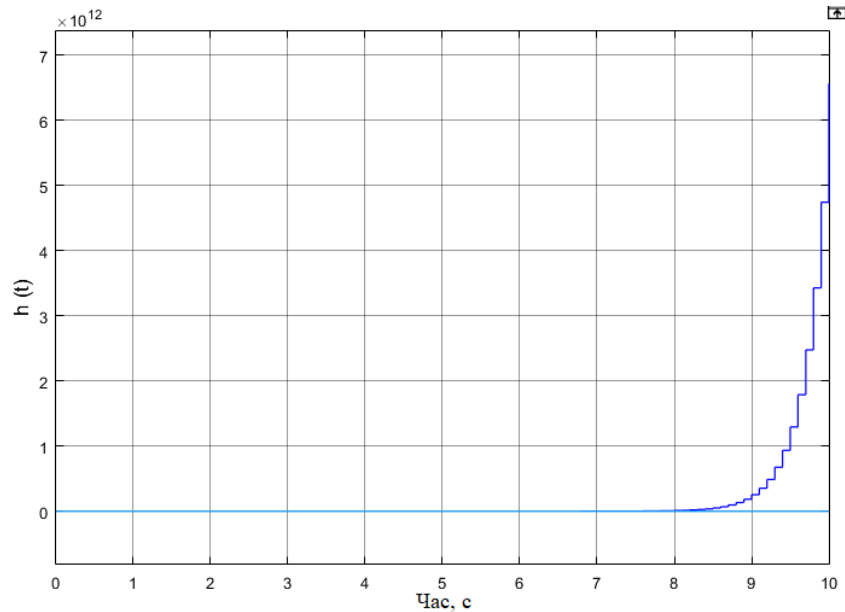


Рисунок 1.20 – Перехідні процеси вихідної системи

Як можна побачити з рисунку 1.20, система є нестійкою, починаємо синтез регулятора зворотного зв'язку за станом, відповідно до алгоритму – з перевірки керованості системи.

Матриця керованості (1.25) має ранг 2, що дорівнює порядку системи. Система керована, а отже можна продовжувати моделювання.

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.692 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.2344 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Визначаємо матриці розширеної моделі системи, які знаходяться за формулами (1.26).

$$A^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & E \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \quad C^* = C \quad (1.26)$$

Використовуючи (1.26) отримуємо матриці розширеної системи (1.27).

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1.384 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4687 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Характеристичні поліноми (1.28) для даної системи отримані через блок Check Step Response Characteristics.

$$D_{16}(z) = z^2 - 0.5936z + 0.08809 \quad (1.28)$$

$$D_{26}(z) = z^2 - 0.5938z + 0.08814$$

Матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку (1.29) матиме дещо інший вигляд, ніж в [11].

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & g_3 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & g_4 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Для знаходження коефіцієнтів зворотного зв'язку модель системи розбивається на окремі канали і для кожного окремо знаходяться коефіцієнти зворотного зв'язку.

Характеристичний поліном для першого каналу (1.30):

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1.384 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0 \end{vmatrix} * |g_1 \quad g_3| = \\ & = \begin{vmatrix} (z - 1.384 + 0.5g_1) & 0.5g_3 \\ -1 & (z - 1) \end{vmatrix} = \\ & = z^2 + (-2.384 + 0.5g_1)z + (1.384 - 0.5g_1 + 0.5g_3). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Характеристичний поліном для другого каналу (1.31):

$$\begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -0.4687 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0 \end{vmatrix} * |g_2 \quad g_4| =$$

$$= \begin{vmatrix} (z + 0.4687 + 0.5g_2) & 0.5g_4 \\ -1 & (z - 1) \end{vmatrix} = \quad (1.31)$$

$$= z^2 + (-0.5313 + 0.5g_2)z + (-0.4687 - 0.5g_2 + 0.5g_4).$$

Тепер відповідні бажані рівняння можна прирівняти до наявних і знайти матрицю G. Розв'язки систем рівнянь та знайдені корені представлені у якості формули (1.32)

$$\begin{cases} -2.384 + 0.5g_1 = -0.5936 \\ 1.384 - 0.5g_1 + 0.5g_3 = 0.08809 \end{cases} \quad \begin{cases} g_1 = 3.5808 \\ g_3 = 0.98898 \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\begin{cases} -0.5313 + 0.5g_2 = -0.5938 \\ -0.4687 - 0.5g_2 + 0.5g_4 = 0.08814 \end{cases} \quad \begin{cases} g_2 = -0.125 \\ g_4 = 0.98898 \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти (1.32) в (1.29) отримаємо (1.33) матрицю коефіцієнтів зворотнього зв'язку.

$$G = [G_1 \ G_2] = \begin{bmatrix} 3.5808 & 0 & 0.98898 & 0 \\ 0 & -0.125 & 0 & 0.98898 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Схема для моделювання представлена на рисунку 1.21.

На рисунку 1.22 представлений вихід схеми 1.21. Вхідні впливи типу Step: 1 через 0с, 2 через 1с.

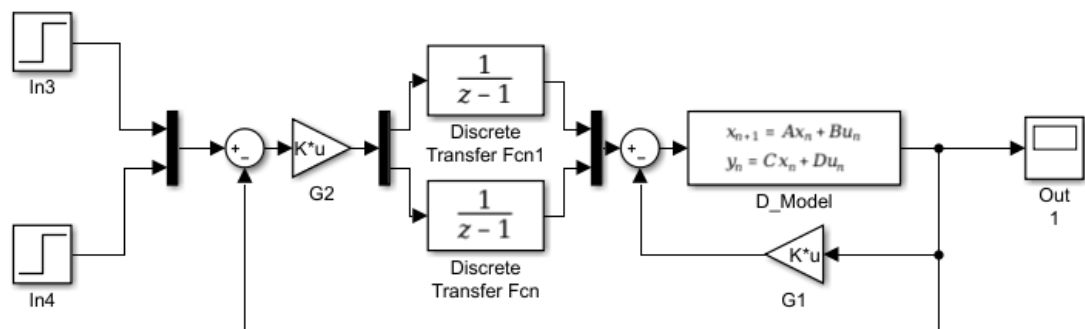


Рисунок 1.21 – Схема для моделювання регулятора побудованого за методом Бенджаміна Ч. Куо.

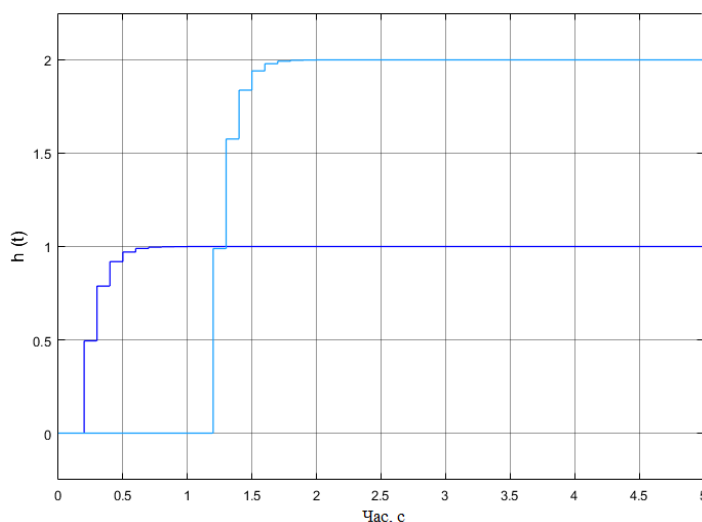


Рисунок 1.22 – Вихідні графіки схеми моделювання.

Як можна побачити з рисунку 1.22, вихідні графіки системи мають кращі показники якості у порівнянні з рисунком 1.20. Відсутня усталена похибка регулювання, досить малий час перехідного процесу та відсутнє перерегулювання. За таких показників якості даний метод можна вважати дуже ефективним. Синтезований регулятор значно підвищує початкові показники якості системи.

1.4.3 Метод Р. Ізермана

Для цифрових систем керування існує кілька методів для побудови регуляторів. Один із таких був показаний в попередній главі і має досить багато переваг. Ще один метод був описаний в [5] Р.Ізерманом. Серед запропонованих автором методів було представлено метод синтезу багатовимірного регулятора станів об'єкту керування з можливістю розв'язання станів.

Проблема керування багатозв'язними системами є досі актуальною і даний метод може стати дуже корисним для синтезу регуляторів, які позбавляють систему впливів змінних стану на інші канали керування, що значно спрощує процес синтезу. Даний метод має досить великий недолік – високу усталену похибку регулювання.

Для демонстрації методу та формул, які використовуються в ньому представлено процес синтезу регулятора для простої багатовимірної системи представленої у якості формули (1.34).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1.34)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Перевіримо показники якості вихідної системи, для подальшого порівняння їх з вихідними графіками системи з регулятором, рисунок 1.23.

Як можна побачити система обрана стійкою та має зв'язки між станами об'єкту керування. Показники якості є такими, що час перехідного процесу є малим близько 0.1 с, перерегулювання відсутнє, але наявна висока усталена похибка регулювання, відповідно до формули (1.16): для першого каналу -9.6 при входньому впливі 1, для другого каналу -5.7 при входньому впливі 2.

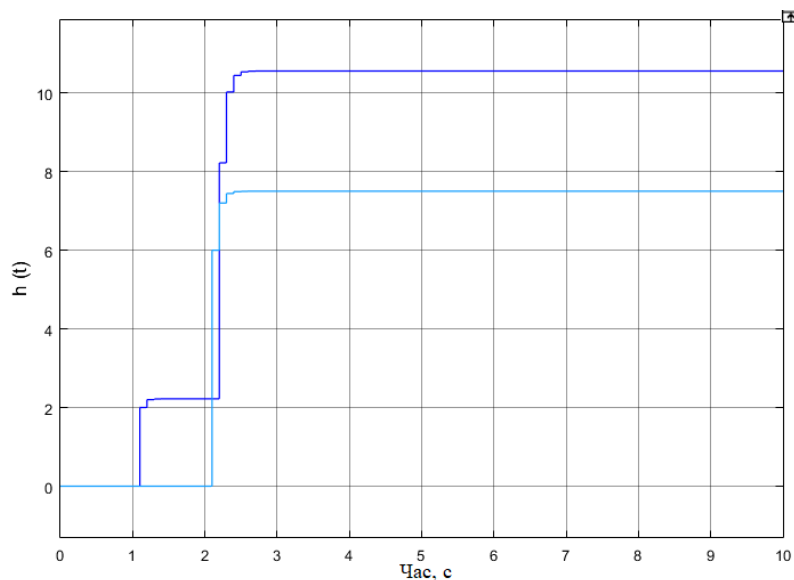


Рисунок 1.23 – Вихідні графіки системи без регулятора.

Для розв'язання станів використовуємо формулу (1.35), запропоновану Р. Ізерманом.

$$K = (CB)^{-1}(CA - \Lambda C), \quad (1.35)$$

де Λ – діагональна матриця бажаних коренів характеристичного рівняння (1.36).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

В якості бажаних коренів характеристичного рівняння системи (1.34) можна обрати будь-які корені такі, щоб система була стійка, наприклад, $\lambda_1 = 0.1$, а $\lambda_2 = 0.3$. Тоді записавши коефіцієнти в (1.36) отримуємо (1.37).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Маючи матрицю бажаних коренів характеристичного рівняння системи, можна в (1.35) підставити (1.34) та (1.37). Отримуємо матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом (1.38).

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & -0.033 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Використовуючи матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом можна побудувати схему, як на рисунку 1.24.

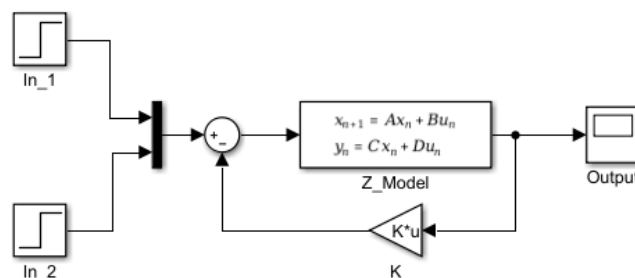


Рисунок 1.24 – Схема моделювання з регулятором для розв'язання каналів.

На рисунку 1.25 представлено вихід схеми з рисунку 1.24.

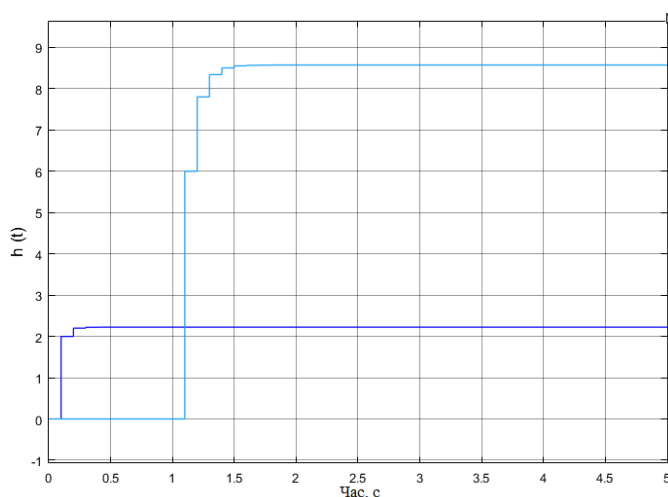


Рисунок 1.25 – Графіки виходу схеми моделювання.

Для перевірки роботи регулятора додамо збурюючий вплив до одного з каналів станів системи, як на рисунку 1.26.

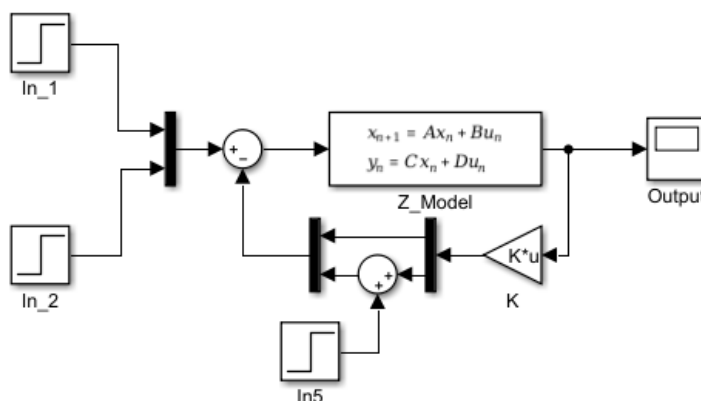


Рисунок 1.26 – Схема для перевірки розв'язання станів

Порівняння виходів схем з рисунків 1.24 та 1.26 представлено на рисунку 1.27.

З рисунку 1.27б можна побачити, що при збурюючому впливі на другий стан об'єкту керування (1.34), другий вихідний графік змінився. В той же час перший стан ОК не змінився і повторив свій графік, аналогічно до рисунку 1.27а. З матриці A в (1.34) зрозуміло, що перший стан об'єкту керування залежить від другого. Зміна другого стану не вплинула на перший, а отже регулятор дійсно розв'язав стани об'єкту керування і зробив їх незалежними.

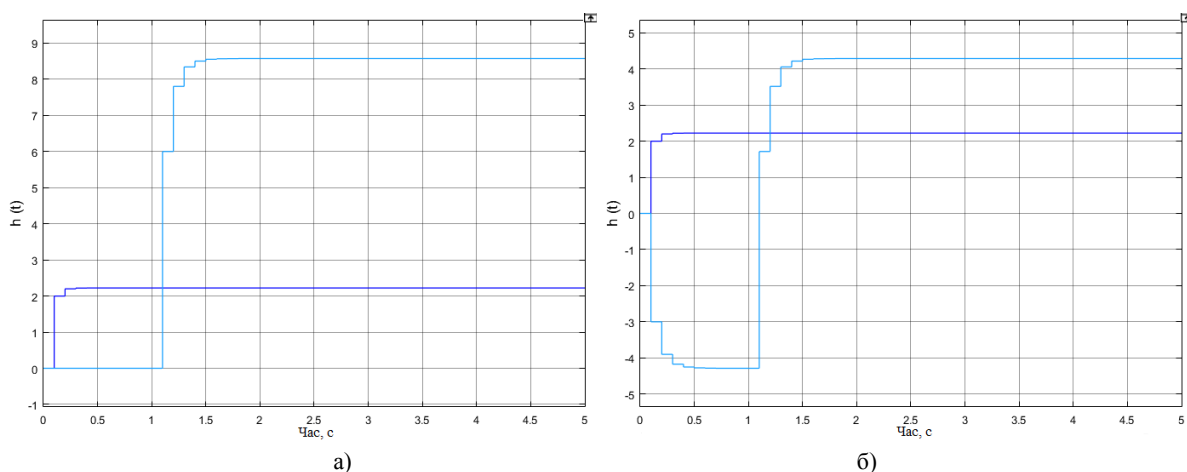


Рисунок 1.27 – Порівняння станів об’єкту керування.

Звісно даний метод має один недолік, він не дозволяє отримати нульову усталену похибку регулювання, але при цьому всі інші показники є досить гарними, перерегулювання нульове, час перехідного процесу дуже малий і при цьому система стійка. Порівнюючи вихідні графіки системи з рисунків 1.23 та 1.25 можна відмітити покращення у часі перехідного процесу, перерегулювання не з’явилося.

Висновки до розділу 1

У першій та другій частинах даного розділу розглянуті питання класифікації багатовимірних систем керування (безперервних та цифрових). Приведені математичні вирази для опису динаміки досліджуваних систем, а саме матриці передавальних функцій, побудовані на математичній платформі передавальних функцій та структурних схем та рівняння стану та виходу – на платформі методу простору станів. Зазначені їх недоліки та переваги. Підкреслена актуальність проектування саме цифрових систем керування, які дозволяють реалізовувати додаткові функції, наприклад убудованість у інтегровані інформаційні системи. При цьому програмне забезпечення таких систем можна змінювати і на період моделювання так і в процесі експлуатації.

В третій частині розділу розглядались питання аналізу багатовимірних цифрових систем керування. Зазначені умови стійкості, умови керованості та

спростережуваності. Перелічені показники якості цифрових систем та приведені правила їх отримання, у тому числі за допомогою прикладного пакету MatLab.

В четвертій частині розділу розглядались три методи-аналоги побудови регуляторів зворотного зв'язку за станом для різних систем, на початку розділу розглянуто адаптований до використання в цифрових системах регулятор зворотного зв'язку за станом, який побудовано на основі розв'язку рівняння типу Сільвестра.

Розглянутий метод дозволяє синтезувати регулятори для широкого спектру цільових систем, що безумовно є його перевагою. До його недоліків можна віднести лише неможливість знаходження коефіцієнтів еталонної моделі цифрової системи, що для систем високих порядків може спричинити досить великі проблеми.

Другий розглянутий метод був запропонований в [11] Бенджаміном Ч. Куо для одновимірних систем. Метод було адаптовано для багатовимірних систем. У випадку багатовимірних систем метод має головне обмеження – він працює лише для автономних систем. При цьому синтезований регулятор має високі параметри якості.

Третій і останній метод був запропонований Р.Ізерманом в [5] і в цілому призначений лише для розв'язання каналів цифрової системи. За таких умов він може працювати для майже будь яких систем, матриці моделі простору станів якої дозволяють використати їх у формулі для визначення матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом. Даний регулятор має малий час перехідного процесу, нульове перерегулювання та система є стійкою. Також до переваг можна додати розв'язання станів ОК, що було перевірено у порівнянні двох систем зі збуреннями одного зі станів та без. Недоліком цього регулятора є усталена похибка регулювання, яка у випадку продемонстрованої системи є досить високою.

2 РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИНТЕЗУ БАГАТОВИМІРНОЇ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

На базі формули Р. Ізермана [5] виведемо математичні вирази для побудови моделі багатовимірної цифрової системи, яка забезпечує задану точність, тобто нульову сталу помилку регулювання.

Як відомо, рівняння замкнутої цифрової системи зі зворотнім зв'язком за станом має вигляд (2.1).

$$x[n + 1] = [A - BK]x[n] = Fx[n], \quad (2.1)$$

де K – матриця коефіцієнтів зворотнього зв'язку за станом.

При цьому рівняння багатовимірної системи з регулятором станів виходи якої не впливають один на одного має вигляд (2.2).

$$y[n + 1] = TCx[n], \quad (2.2)$$

де $T = \text{diag}(z_i) \ i = 1, 2, \dots, n$ – матриця бажаних коренів характеристичного рівняння системи.

Відповідно, для моменту відліку $[n+1]$ можна записати вихід системи, як (2.3).

$$y[n + 1] = Cx[n] = C[A - BK]x[n], \quad (2.3)$$

З (2.2) та (2.3) можна прирівняти праві частини рівнянь.

$$C[A - BK]x[n] = TCx[n] \quad (2.4)$$

Оскільки в (2.4) змінна одна і вони ідентичні в лівій та правій частині, можна прирівняти коефіцієнти при векторах змінних стану x і отримати рівняння з однією змінною відносно K (2.5).

$$C[A - BK] = TC \quad (2.5)$$

Розв'язавши рівняння (2.5) аналітично відносно змінної \mathbf{K} , можна отримати формулу для знаходження матриці коефіцієнтів зворотнього зв'язку за станом (2.6).

$$\mathbf{K} = [CB]^{-1}[CA - TC], \quad (2.6)$$

де діагональні елементи t_i матриці T – це корені характеристичного рівняння (2.7).

$$\det[zE - A + BK] = \det[zE - F] \quad (2.7)$$

В загальному випадку для (2.6) матриця \mathbf{K} матиме вигляд, як (2.8).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11} - z_1}{b_{11}} & \frac{a_{12}}{b_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{b_{11}} \\ \frac{a_{21}}{b_{22}} & \frac{a_{22} - z_2}{b_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{b_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{b_{nn}} & \frac{a_{n2}}{b_{nn}} & \dots & \frac{a_{nn} - z_n}{b_{nn}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

(2.6) це формула для знаходження коефіцієнтів зворотнього зв'язку за станом для розв'язання каналів, ідентична до запропонованої Р.Ізерманом.

Оскільки даний регулятор уже розглядався у розділі 1, відомо, що при всіх його перевагах в нього є недолік – висока усталена похибка регулювання. Для боротьби з нею можна використати корегувальні коефіцієнти для виходу системи.

В загальному вигляді матриця корегувальних коефіцієнтів системи матиме вигляд (2.9).

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} k_{11}^* & \dots & k_{1l}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{l1}^* & \dots & k_{lu}^* \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Для знаходження матриці корегувальних коефіцієнтів пропонується наступне рішення:

Першим кроком потрібно визначити матричну передавальну функцію замкнутої системи управління (2.10).

$$W_3^*(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \quad (2.10)$$

Запишемо вираз в дужках з правої частини (4.10) в матричній формі, для системи другого порядку, для спрощення розрахунків.

$$\begin{aligned} & \left(z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ & = \left(\begin{pmatrix} z - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & z - a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21} & b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} \\ b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} & b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22} \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} z - a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21} & -a_{12} + b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} \\ -a_{21} + b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} & z - a_{22} + b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{z - a_{22} + b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22}}{D} & \frac{a_{12} - b_{11}k_{12} - b_{12}k_{22}}{D} \\ \frac{a_{21} - b_{21}k_{11} - b_{22}k_{21}}{D} & \frac{z - a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21}}{D} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(z) = & z^2 + (-a_{22} + b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22})(-a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21})z + \\ & + (-a_{22} + b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22})(-a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21}) - \\ & + (-a_{12} + b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22})(-a_{21} + b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21}). \end{aligned}$$

Оскільки в системі за допомогою синтезованої матриці \mathbf{K} виконується рівність (2.7), тобто (2.11):

$$D(z) = D^*(z) = (z - z_1)(z - z_2), \quad (2.11)$$

То можна виконати заміну, замістивши характеристичний поліном наявної системи на бажаний характеристичний поліном $D^*(z) = (z - z_1)(z - z_2)$. Внаслідок цієї заміни отримуємо вираз (2.12) для матричної передавальної функції замкнутої системи (для випадку з діагональними матрицями **C** та **B**).

$$W(z) = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}b_{11}}{z - z_1} & 0 \\ 0 & \frac{c_{22}b_{22}}{z - z_2} \end{bmatrix} = K_h \begin{bmatrix} \frac{1}{z - z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - z_2} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\text{де } K_h = \begin{bmatrix} c_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & c_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Відповідно для випадку n -мірної системи з діагональними матрицями **C** та **B**, K_h має вигляд (2.13).

$$K_h = \begin{bmatrix} k_{h11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{h22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{hlr} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\text{де } k_{hij} = c_{ii}b_{jj}; \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Визначимо кінцеві значення вектор-функції виходу досліджуваної системи управління $y[n]$ при $n \rightarrow \infty$, використаємо для цього формулу (2.14) для обчислення кінцевого значення функції.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} Y(z) \quad (2.14)$$

При наявності вхідного впливу типу “Step”, тобто вхідний вплив має вигляд (2.15).

$$g(z) = \frac{z}{z-1} \quad (2.15)$$

За такого вхідного впливу поліном виходу системи може бути записаний, як (2.16).

$$Y(z) = W_3(z) \frac{z}{z-1} \quad (2.16)$$

Виконаємо підстановку (2.16) в (2.14), та спростимо вираз.

$$y[n] = \lim_{z \rightarrow 1} W_3(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \mathbf{K}_h \begin{bmatrix} \frac{1}{z-z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-z_2} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_h \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \quad (2.17)$$

Використовуючи формули (2.4) та (2.17) можна прийти до формули (2.18).

$$\mathbf{T} \mathbf{K}^* \mathbf{K}_h \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \quad (2.18)$$

Розв'язавши рівняння (2.18) відносно \mathbf{K}^* можна отримати формулу (2.19), для знаходження матриці поправочних коефіцієнтів. (для системи другого порядку з діагональними матрицями \mathbf{B} і \mathbf{C}).

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}_h^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{E} \quad (2.19)$$

Переписавши формулу (2.19) в загальному вигляді маємо (2.20):

$$K^* = T^{-1} K_h^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1-z_l} \end{bmatrix}^{-1} E \quad (2.20)$$

Таким чином використовуючи даний метод можна синтезувати регулятори для систем зі зв'язками між станами такі, що можуть розв'язати стани ОК і при цьому виправити недолік методу Р.Ізермана, скорегувавши високу усталену похибку регулювання.

Для успішного синтезу регулятора все, що потрібно - це використати формули (2.6) для синтезу регулятора зворотного зв'язку та формулу (2.20) для синтезу матриці корегувальних коефіцієнтів виходу системи.

Висновки до розділу 2

В даному розділі розроблена математична модель методу синтезу багатовимірної цифрової системи керування.

Виведено нову формули для визначення матриці корегувальних коефіцієнтів, яка забезпечує нульову сталу похибку керування.

3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ТА ПРАЦЕЗДАТНОСТІ ЗАПРОПОНОВАНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИНТЕЗУ БАГАТОВИМІРНОЇ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ.

Для підтвердження отриманих аналітичних виразів проведемо експериментальні дослідження синтезу цифрової системи третього порядку, яка описується векторно-матричними моделями виду (3.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 98 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Синтезована система повинна при вхідних впливах: 1 з затримкою 1с, 2 з затримкою 2с та 3 з затримкою 3с, забезпечити нульове перерегулювання, скорочення часу регулювання та нульову усталену похибку регулювання.

Кроки першого експерименту:

Крок 1. Перевірка керованості системи (3.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 & -2 & 3 & 640 & -22 & 23 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -18 & 2 & 420 & -160 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 196 & 2 & 2 & 1370 & -174 & 296 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ранг матриці керованості (3.2) рівний 3, що дорівнює порядку системи, а отже система (3.1) є керованою.

Крок 2. Аналіз якості системи (3.1) без регулятора.

Для заданої системи (3.1) перевіримо показники якості за допомогою моделі, яка побудована з використанням Matlab/Simulink, рисунок 3.1.

Вихід схеми з рисунку 3.1 показано на рисунку 3.2. За входніх впливів 1, 2 та 3, що активуються в моменти часу 1, 2 та 3 с

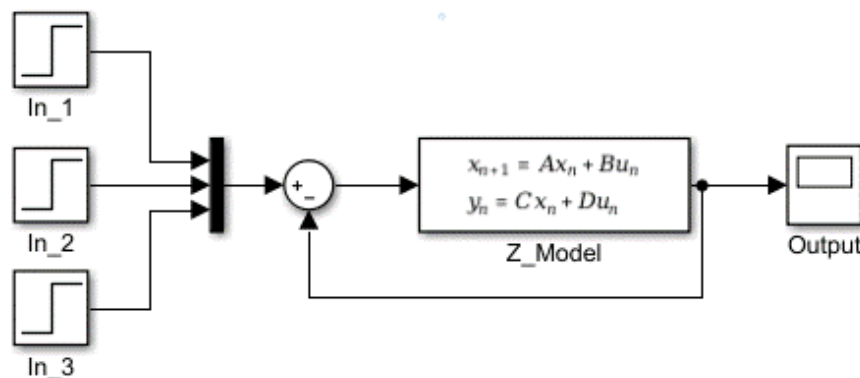


Рисунок 3.1 – Схема для моделювання системи без регулятора.

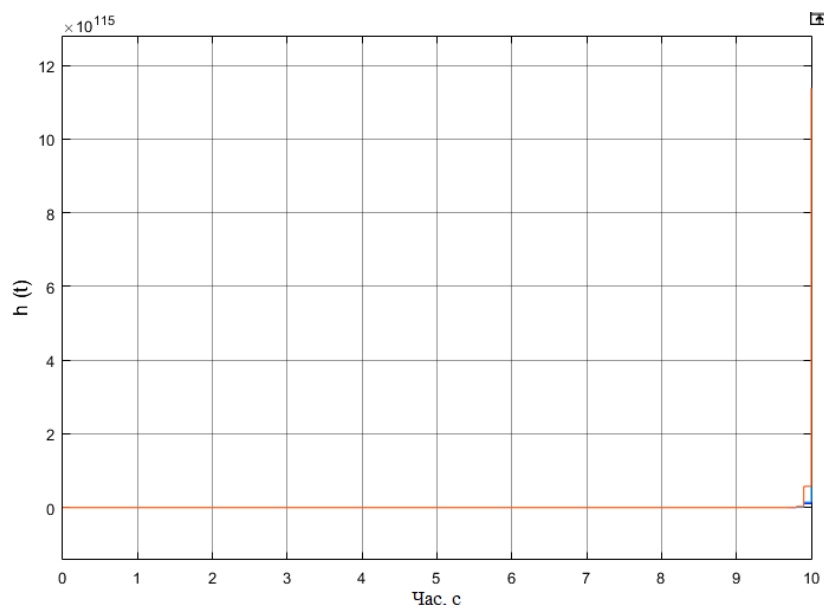


Рисунок 3.2 – Перехідні процеси вихідної цифрової багатовимірної системи.

З рисунку 3.2 зрозуміло, що системи є нестійкою, про параметри якості не може бути мови. Така ситуація обумовлена тим, що система має зв'язки між станами ОК, до того ж корені характеристичного рівняння системи є більшими за 1, тому система є нестійкою. (див. формулу 3.3).

$$|z_i| \leq 1 \quad (3.3)$$

Крок 3. Синтез цифрового регулятора багатовимірної системи

Задамо матрицю бажаних коренів характеристичного рівняння системи **T** (3.4).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Знайдемо матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом **K** (3.5) за (2.6), використовуючи (3.1) та (3.4).

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 98 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} -14.7 & -3 & -9 \\ 1 & 8.8 & 2 \\ 882 & -9 & 15.3 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} -0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14.7 & -3 & -9 \\ 1 & 8.8 & 2 \\ 882 & -9 & 15.3 \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} 2.45 & 0.5 & 1.5 \\ -0.5 & -4.4 & -1 \\ 98 & -1 & 1.7 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Крок 4. Моделювання синтезованої системи з використанням Matlab/Simulink

Для перевірки роботи регулятора (3.5) потрібно змінити схему моделювання з рисунку 3.1 до вигляду, як на рисунку 3.3.

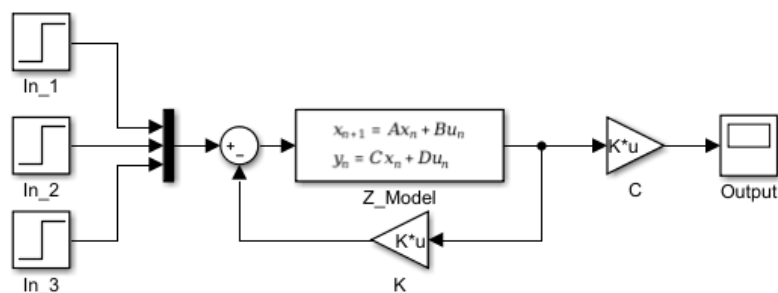


Рисунок 3.3 – Схема моделювання системи з регулятором стану.

З моделі системи на рисунку 3.3 було винесено матрицю C , щоб отримати вектор станів ОК на виході системи, в канал зворотного зв'язку додано регулятор стану, результат роботи схеми представлено на рисунку 3.4.

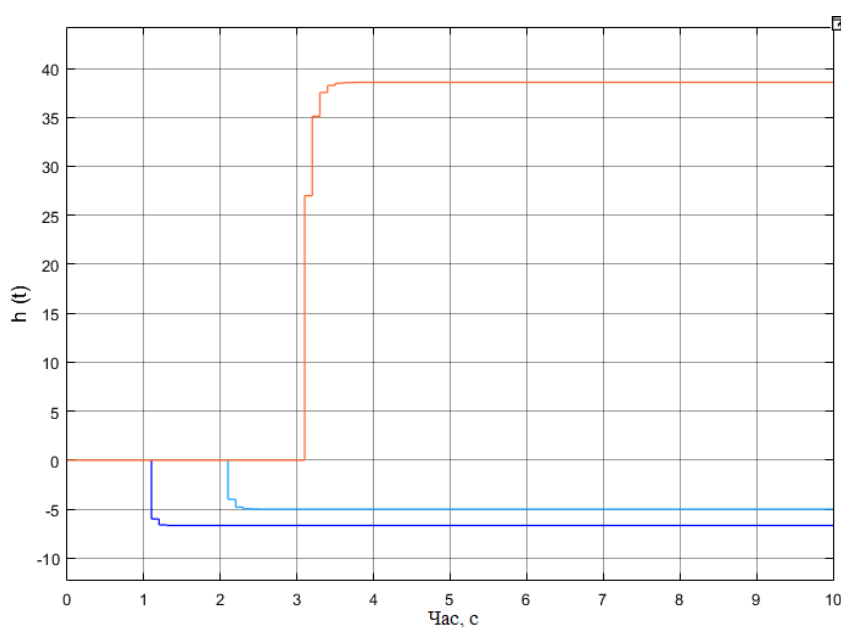


Рисунок 3.4 – Результат моделювання синтезованої системи.

За графіками перехідних процесів, отриманих в результаті моделювання видно, що регулятор не тільки стабілізував цифрову систему, але вирішив і проблему зв'язаності каналів, і нульове перерегулювання. Але все-ще залишається висока усталена похибка регулювання.

Крок 5. Розрахунок матриці корегувальних коефіцієнтів

Для виправлення усталеної похибки регулювання потрібно скористатися виведеною аналітичною формулою (2.20), для синтезу матриці корегувальних коефіцієнтів виходу системи (3.6).

$$\begin{aligned}
K^* &= T^{-1} K_h^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1-z_l} \end{bmatrix}^{-1} E = \\
&= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-0.1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-0.2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-0.3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1111 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1.42 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (3.6) \\
&= \begin{bmatrix} -1.667 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1111 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1.42 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2593 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Крок 6. Моделювання синтезованої багатовимірної цифрової системи керування

Для підтвердження отриманих аналітичних виразів виконуємо моделювання багатовимірної цифрової системи керування, яка забезпечує задану точність регулювання. Модель досліджуваної системи та графіки перехідних процесів представлені відповідно на рисунках 3.5 та 3.6.

Виконавши синтез регулятора і порівнявши вихідні графіки виходів системи з рисунків 3.5 та 3.6, можна побачити суттєву різницю. Від нестійкої системи вдалося перейти до стійкої системи з нульовою усталеною похибкою, нульовим перерегулюванням та малим часом перехідного процесу, для першого та другого

виходів – 0.2 с, для третього – 0.3 с. На рисунку 3.6 видно чітке відпрацювання поставленого для системи завдання з нульовою усталеною помилкою.

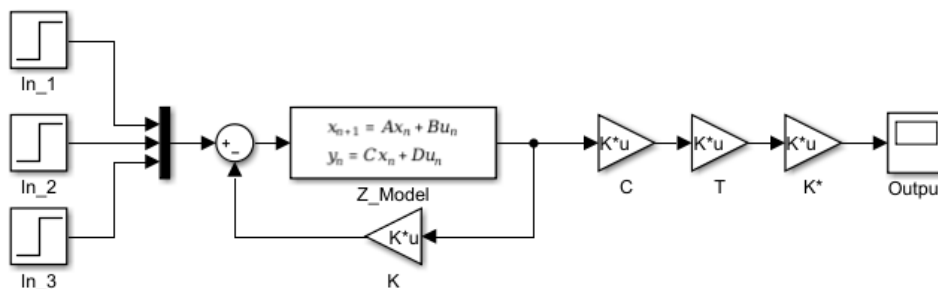


Рисунок 3.5– Модель багатовимірної цифрової системи з регулятором зворотного зв'язку та матрицею корегувальних коефіцієнтів.

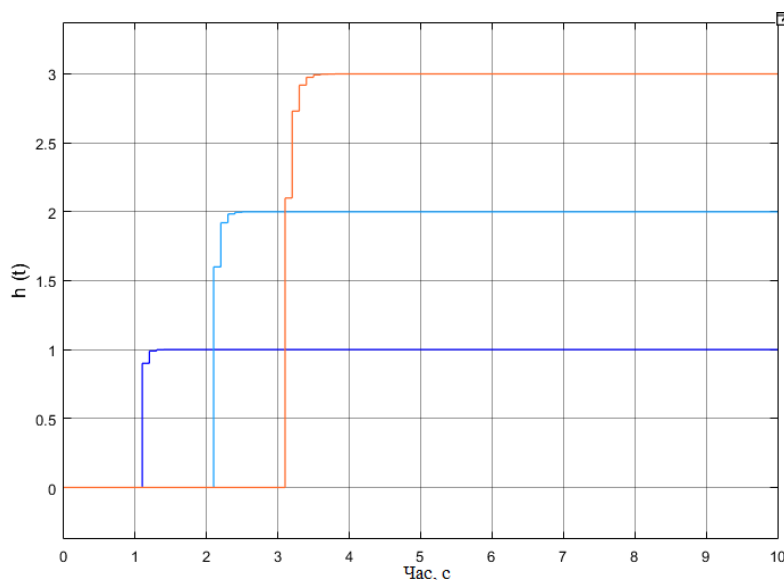


Рисунок 3.6 – Вихідні графіки схеми моделювання.

Крок 7. Синтез багатовимірної багатозв'язної цифрової системи

Проводячи експериментальні дослідження у попередньому прикладі, для синтезу цифрової системи використовувався математичний апарат, який виводився аналітично для матриці **B** і **C**, діагонального виду.

Порівняймо вплив регуляторів на різні типи систем. На рисунку 3.7 показано вихід системи для автономної моделі системи (3.7). Аналогічно для моделі системи багатозв'язної за станами (3.8), вихід системи такого типу показано на рисунку 3.8. Для обох систем бажані корені обрані кратними, величиною 0.2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

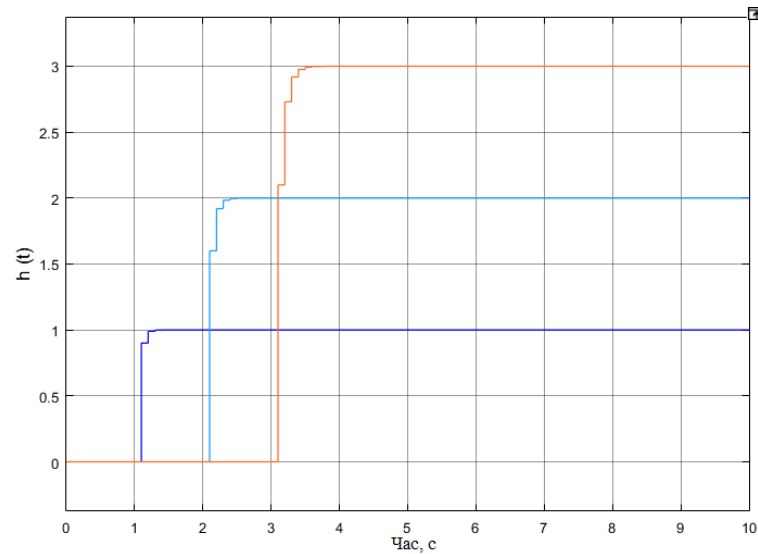


Рисунок 3.7 – Вихід автономної схеми з синтезованим регулятором.

Для автономних систем регулятор працює правильним чином і якість вихідних перехідних процесів є високою.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 98 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Наступним кроком експериментальний досліджень є перевірка працездатності виведеної формули для синтезу багатозв'язаних за станами, входами та виходами цифрових систем. У цьому випадку векторно-матрична модель вихідної системи описується як (3.9)

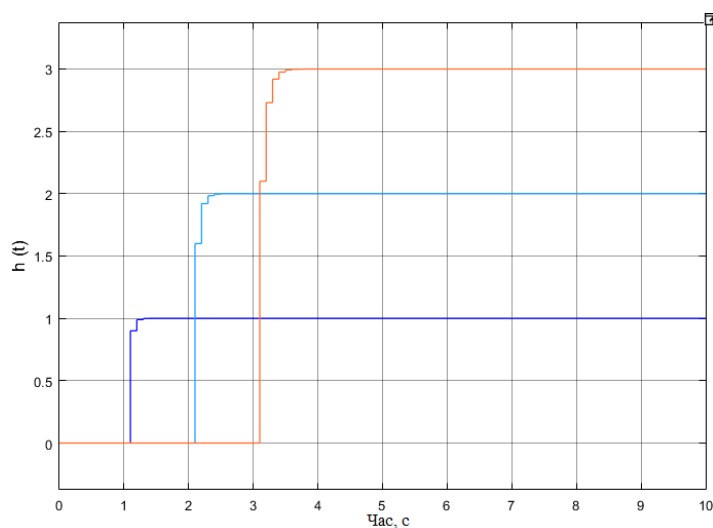


Рисунок 3.8 – Вихід багатозв’язної за станом системи з синтезованим регулятором.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 98 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 14 & -2 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -0.2 \\ 122 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Перехідні процеси системи (3.9) представлені на рисунку 3.1.9.

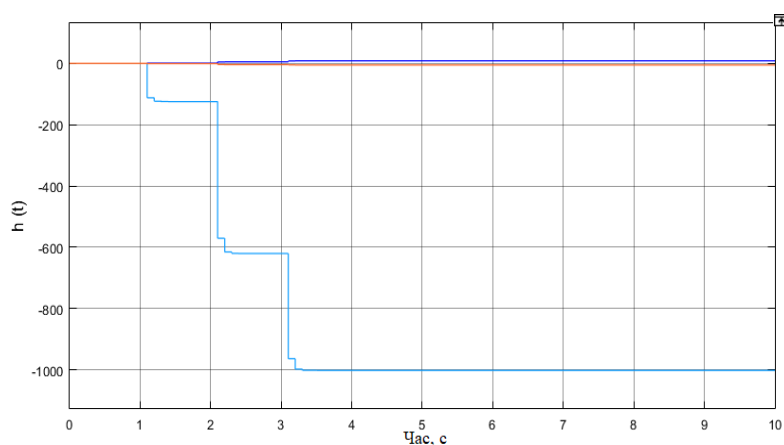


Рисунок 3.9 – Вихід багатозв’язної за станами, входами та виходами системи з синтезованим регулятором.

В ході проведення досліджень було помічено, що у формулі (2.12), яка виводилась для діагональних матриць можна було використати не діагональні елементи, а замінити матрицю K_h на фактично її аналог $(C * B)$ за такого запису формула (2.20) зміниться до вигляду (3.10).

$$K^* = T^{-1}(C * B)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1-z_l} \end{bmatrix}^{-1} E \quad (3.10)$$

Якщо розглядати формулу (3.10) у розрізі діагональних матриць C та B , то їх добуток і далі буде рівний матриці K_h , у випадку з недіагональними матрицями C та B , при їх добутку будуть враховуватись впливи інших каналів на кожен конкретний канал, а оскільки всі інші аргументи формули (3.10) є діагональними матрицями, то при недіагональності добутку C та B впливати на систему буде лише головна діагональ матриці. Використаємо змінену формулу (3.10) для моделювання системи з недіагональними матрицями.

Як можна побачити з рисунку 3.10 внесення поправок до формули є успішним і формулу вдалося використати для синтезу багатозв'язної цифрової системи.

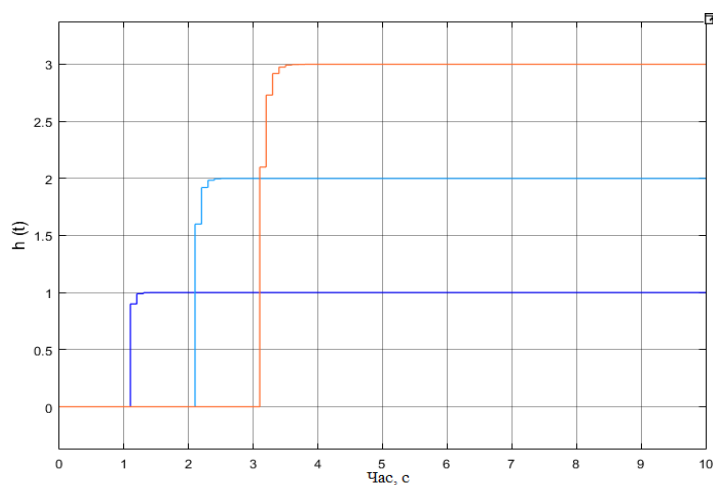


Рисунок 3.10 – Вихід багатозв'язної за станами, входами та виходами системи з новим синтезованим регулятором.

Імовірно саме неврахування впливу інших каналів системи у множнику K_h формули (2.20) призводило до виникнення усталеної похибки регулювання. Дійсно, якщо проаналізувати отриману формулу, то другий множник матиме наступний вигляд (3.11).

$$C * B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{22} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{22} & \dots & cb_{1r} \\ cb_{21} & cb_{22} & \dots & cb_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cb_{l1} & cb_{l2} & \dots & cb_{lr} \end{bmatrix},$$
(3.11)

де $cb_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} b_{kj}$ $i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, r$.

Впливати на систему відповідно буде не вся матриця, а лише її головна діагональ. Матрицю, що впливає на систему представлено в якості формули (3.12).

$$CB_p = \begin{bmatrix} cb_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & cb_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & cb_{lr} \end{bmatrix},$$
(3.12)

де $cb_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} b_{kj}$ $i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, r$.

Висновки до розділу 3.

За результатами проведених експериментальних досліджень підтверджено справедливість отриманих аналітичних формул. Підтвердження їх роботи було виконане шляхом моделювання цифрових системи з синтезованими регуляторами в середовищі MatLab/Simulink.

Моделювання було виконане для системи багатозв'язної за станом та системи багатозв'язної за станами та керуванням. З результатів моделювання можна відзначити, що регулятор першого типу систем мав високі показники якості: нульову усталену похибку регулювання, нульове перерегулювання та малий час перехідного перехідного процесу.

Після отриманих в першій частині розділу результатів, виконано моделювання роботи попередніх двох типів систем і додатково автономної системи.

На відміну від інших двох типів систем, регулятор багатозв'язної за станами, входами та виходами системи не зміг повністю прибрати усталену похибку регулювання. Було виконано додаткові дослідження формули розрахунку матриці поправочних коефіцієнтів виходу системи, була отримана нова адаптована формула для їх розрахунку, шляхом заміни однієї з матриць-множників формули розрахунку матриці корегувальних коефіцієнтів на добуток матриць **C** та **B**.

Використавши нову формулу розрахунку поправочних коефіцієнтів знову було виконане моделювання в середовищі MatLab/Simulink. Цього разу успішно, і синтезована цифрова система відповідала всім вимогам по забезпеченню якості.

4 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАТАМЕТРІВ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ НА ЯКІСТЬ ВИКОНАННЯ СИНТЕЗУ

4.1 Постановка задачі

Для різних типів багатовимірних цифрових систем керування (автономної, багатозв'язної за станом, багатозв'язної за станом та керуванням), які описуються векторно-матричними моделями методу простору станів провести наступні дослідження:

- вплив коренів характеристичного рівняння на показники якості синтезованої системи;
- вплив часу квантування на час перехідного процесу;
- можливість використання запропонованих аналітичних моделей для синтезу цифрових багатовимірних систем з невідомим вектором станів;
- виконання синтезу цифрових багатовимірних систем з узагальненим регулятором.

4.2 Дослідження властивостей методу

4.2.1 Модель автономної системи

Першим етапом досліджень було вирішено обрати найпростіший з варіантів систем і до того ж той, для якого з самого початку і виводився даний метод розрахунку матриць регулятора станів та корегувальних коефіцієнтів, а саме автономну систему. Така система позбавлена перехресних зв'язків між станами об'єкту керування.

Для початку досліджень, була обрана модель автономної системи вигляду (4.1).

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Для моделі (4.1) перш за все проводились дослідження впливу коренів характеристичного рівняння на показники якості системи. При цьому слід відзначити, що у експерименті обирались різні значення коренів

Для цього корені бажаного поліному характеристичного рівняння системи змінювались так, щоб вони задовольняли умові стійкості цифрової системи (4.2):

$$|z_i| < 1 \tag{4.2}$$

Результати досліджень представлені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вплив коренів характеристичного рівняння на показники якості системи.

№	K1	K2	K3	Час кван,с	Стійкість	Перерег,%	Уст пом	Час ПП,с
1	0.1	0.1	0.1	0.1	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.2
2	0.1	0.1	0.2	0.1	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.2
3	0.1	0.2	0.1	0.1	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.2
4	0.2	0.1	0.1	0.1	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.2
5	0.1	0.2	0.2	0.1	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.2
6	0.2	0.1	0.2	0.1	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.2
7	0.2	0.2	0.1	0.1	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.2
8	-0.1	-0.1	-0.1	0.1	Стійка	10, 10, 10	0	0.2,0.2,0.2

Продовження таблиці 4.1

№	K1	K2	K3	Час кван,с	Стійкість	Перерег, %	Уст пом	Час ПП,с
9	-0.2	-0.1	-0.1	0.1	Стійка	20, 10, 10	0	0.2,0.2,0.2
10	-0.1	-0.2	-0.1	0.1	Стійка	10, 20, 10	0	0.2,0.2,0.2
11	-0.1	-0.1	-0.2	0.1	Стійка	10, 10, 20	0	0.2,0.2,0.2
12	-0.2	-0.2	-0.1	0.1	Стійка	20, 20, 10	0	0.2,0.2,0.2
13	-0.1	-0.2	-0.2	0.1	Стійка	10, 20, 20	0	0.2,0.2,0.2
14	-0.2	-0.1	-0.2	0.1	Стійка	20, 10, 20	0	0.2,0.2,0.2
15	-0.2	0.3	0.1	0.1	Стійка	20, 0, 0	0	0.2,0.3,0.2
16	0.1	-0.2	0.3	0.1	Стійка	0, 20, 0	0	0.2,0.2,0.3
17	0.05	0.4	-0.3	0.1	Стійка	0, 0, 30	0	0.1,0.4,0.3
18	0.3	0.2	0.1	0.1	Стійка	0	0	0.3,0.2,0.2
19	-0.1	-0.25	0.3	0.1	Стійка	10, 25, 0	0	0.2,0.3,0.3
20	0.7	-0.1	-0.2	0.1	Стійка	0, 10, 20	0	0.9,0.2,0.2

Як можна побачити з таблиці 4.1, зміна бажаних коренів характеристичного рівняння автономної системи впливає на перерегулювання та час перехідного процесу. В кожному досліді в якому корені характеристичного рівняння були від'ємним на виході системи присутнє перерегулювання, яке відповідає величині кореня. Час перехідного процесу системи також збільшується в залежності від обраних коренів для кожного каналу.

Друге дослідження для даної моделі системи проводилось з ціллю визначення впливу часу квантування та коренів на перехідний процес системи. Для даного дослідження була використана та ж модель, а для більшої наочності корені були розбиті на 4 серії 0.1, 0.4, 0.6, 0.8. Результати даного дослідження наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Вплив часу квантування та коренів на час перехідного процесу.

№	K1	K2	K3	Час Кван, с	Час ПП,с
1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2,0.2,0.2
2	0.1	0.1	0.1	0.25	0.5,0.5,0.5
3	0.1	0.1	0.1	0.5	1,1,1
4	0.1	0.1	0.1	1	2,2,2
5	0.1	0.1	0.1	2	5,4,5
6	0.4	0.4	0.4	0.1	0.4,0.4,0.4
7	0.4	0.4	0.4	0.25	1,1,1
8	0.4	0.4	0.4	0.5	2,2,2
9	0.4	0.4	0.4	1	4,4,4
10	0.4	0.4	0.4	2	9,8,9
11	0.6	0.6	0.6	0.1	0.6,0.6,0.6
12	0.6	0.6	0.6	0.25	1.5,1.5,1.5
13	0.6	0.6	0.6	0.5	3,3,3
14	0.6	0.6	0.6	1	6,6,6
15	0.6	0.6	0.6	2	13,12,13
16	0.8	0.8	0.8	0.1	1.4,1.4,1.4
17	0.8	0.8	0.8	0.25	3.5,3.5,3.5
18	0.8	0.8	0.8	0.5	7,7,7
19	0.8	0.8	0.8	1	14,14,14
20	0.8	0.8	0.8	2	29,28,29

З таблиці 4.2 можна чітко прослідкувати збільшення часу перехідного процесу при збільшенні значення коренів та збільшенні часу квантування. Це прослідковується більш наглядно, якщо привести таблицю 4.2 у вигляді діаграми 4.1.

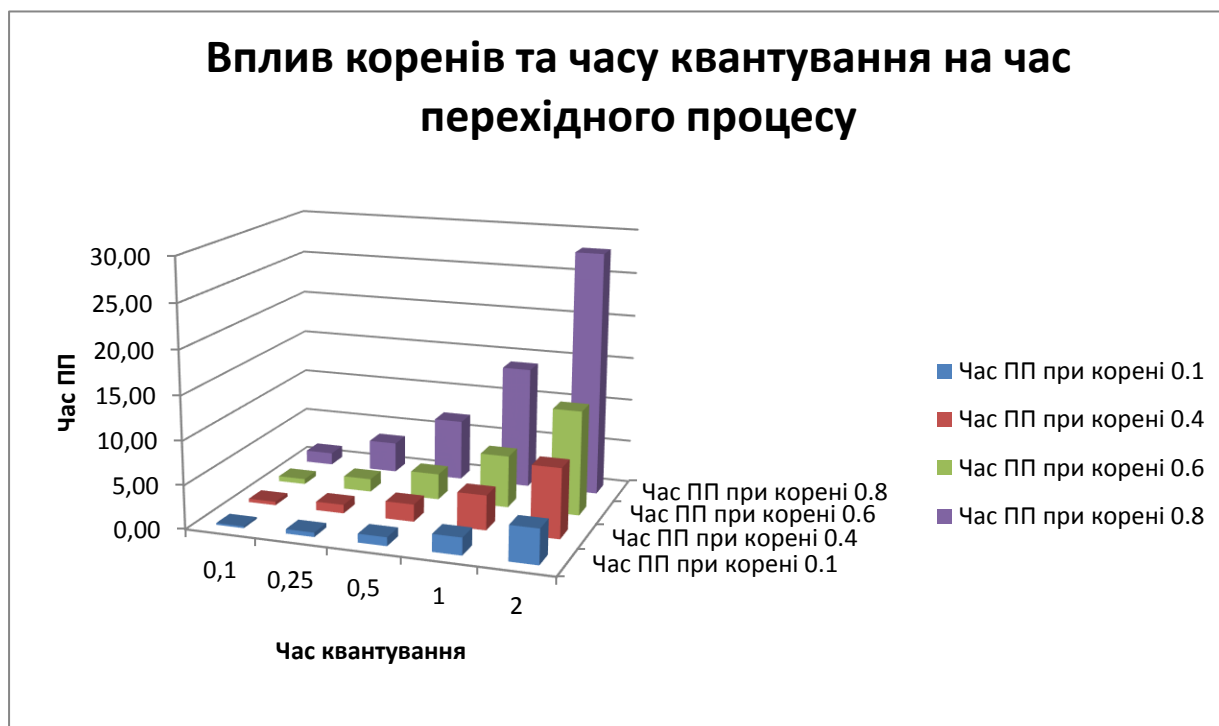


Рисунок 4.1 – Діаграма «Вплив коренів та часу квантування на час перехідного процесу».

Наступне дослідження проводилось з ціллю визначення впливу значень коренів на величину перерегулювання. З таблиці 4.1 можна визначити, що при від'ємних коренях спостерігається перерегулювання, тому потрібне додаткове дослідження впливу величини від'ємного кореня на величину перерегулювання. Результати представлені в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Вплив величини від'ємних коренів на перерегулювання.

№	K1	K2	K3	Перерегулювання, %
1	-0.05	-0.05	-0.05	5
2	-0.1	-0.1	-0.1	10

Продовження таблиці 4.3

№	K1	K2	K3	Перерегулювання
3	-0.2	-0.2	-0.2	20
4	-0.3	-0.3	-0.3	30
5	-0.4	-0.4	-0.4	40
6	-0.5	-0.5	-0.5	50
7	-0.6	-0.6	-0.6	60
8	-0.7	-0.7	-0.7	70
9	-0.8	-0.8	-0.8	80
10	-0.9	-0.9	-0.9	90

При розгляді даних отриманих з дослідів, показаних в таблиці 4.3 впливає лінійна залежність величини перерегулювання від значення кореня характеристичного рівняння. Враховуючи, що матриці є не одиничними, то це означає, що величина значень на діагоналях матриці не впливає на величину перерегулювання, але можуть впливати зв'язки між каналами, тому потрібні більш детальні дослідження різних моделей для встановлення достовірності.

4.2.2 Модель багатозв'язної за станами системи

Друга модель системи (4.3) для дослідів була обрана з недіагональною матрицею **A**, серії цих дослідів дадуть зрозуміти як перехресні зв'язки між станами об'єкту управління впливають на роботу регулятора і відповідно на вихід системи.

Для моделі (4.3) була проведена серія з 11 дослідів. В кожному досліді змінювались обрані корені характеристичного рівняння бажаної системи і спостерігалися зміни в виході системи, які фіксувались в таблиці 4.4.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 12 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & -11 & 2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Таблиця 4.4 – Вплив коренів характеристичного рівняння на показники якості системи.

№	K1	K2	K3	Стійкість	Перерегул, %	Уст помил	Час ПП,с
1	0.1	0.2	0.3	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.3
2	0.35	0.2	0.3	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.3
3	0.001	0.2	0.3	Стійка	0	0	0.1,0.2,0.3
4	0.97	0.2	0.3	Стійка	0	0	>10,0.2,0.3
5	0.2	0.2	0.3	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.3
6	0.4	0.2	0.3	Стійка	0	0	0.4,0.2,0.3
7	0.5	0.2	0.3	Стійка	0	0	0.5,0.2,0.3
8	-0.1	0.2	0.3	Стійка	10, 0, 0	0	0.2,0.2,0.3
9	-0.001	0.2	0.3	Стійка	0.1, 0, 0	0	0.1,0.2,0.3
10	-0.97	0.2	0.3	Стійка	97, 0, 0	0	>10,0.2,0.3
11	0.1	0.1	0.3	Стійка	0	0	0.2,0.2,0.3

Всі дослід, результати яких показані в таблиці 4.4 проводились зі сталим часом квантування 0.1с.

Як можна побачити з дослідів 8, 9 та 10 були перевірені від'ємні корені характеристичного рівняння. При від'ємних коренях спостерігається

перерегулювання, яке має величину обраного кореня характеристичного рівняння, при цьому перерегулювання ніяким чином не впливає на час перехідного процесу і встановлення вихідного значення проходить за той-же час як і при додатному корені такої-ж величини.

Оскільки вхідним сигналом досліджень був step величиною в 1. Потрібно провести дослідження на вплив величини вхідного сигналу на величину перерегулювання, для цього була проведена серія з п'яти дослідів, результати яких представлені у вигляді таблиці 4.5.

Таблиця 4.5 – Вплив входу системи на величину перерегулювання.

№	K1	K2	K3	Вхід1	Вхід2	Вхід3	Перерег1, од	Перерег2, од	Перерег3, од
1	-0.2	-0.2	-0.2	1	1	1	2	0.2	0.2
2	-0.2	-0.2	-0.2	2	2	2	0.4	0.4	0.4
3	-0.2	-0.2	-0.2	3	3	3	0.6	0.6	0.6
4	-0.2	-0.2	-0.2	4	4	4	0.8	0.8	0.8
5	-0.2	-0.2	-0.2	5	5	5	1	1	1

Остання серія дослідів показала, що перерегулювання на виході системи залежить не лише від величини обраного кореню, але й від вхідного впливу. Видно, що величина перерегулювання дорівнює добутку величини від'ємного кореня на вхідний вплив.

4.2.3 Модель багатозв'язної за станами, керуванням та виходом цифрової системи

Даний варіант моделей систем є одним з найскладніших, адже на систему впливають не лише перехресні зв'язки між станами в матриці **A**, але й перехресні зв'язки між входами в матриці **B** та між виходами в матриці **C**.

Початково даний метод, як раніше вже згадувалось, розраховувався лише для випадків, коли матриці моделі простору станів є діагональними, але це дуже рідкісний

випадок, коли реальна система може бути представленою такою моделлю. Відповідно найцікавішими та найнеобхіднішими були дослідження, які дозволили б дати відповіді на питання про роботоспроможність даного методу для систем, які мають перехресні зв'язки в матрицях **A**, **B**, **C**.

Для дослідів була обрана модель третього порядку. Перша серія дослідів була потрібна для визначення впливу коренів характеристичного рівняння системи на вихід моделі. Для моделей з діагональними матрицями **B** і **C** результат був очікуваним, але у випадку з багатозв'язністю, метод міг би і не спрацювати.

Значення для моделі обирались випадковим чином, але як показали попередні дослідження – це не має значення, якщо метод працюватиме для таких значень то він буде справедливим для будь-що великих та малих значень.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 98 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 14 & -2 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -0.2 \\ 122 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.4)

Перше дослідження включає в себе 18 дослідів, в яких перевірявся вплив коренів характеристичного рівняння системи на перерегулювання, час перехідного процесу та усталену похибку (при цьому корені обирались однаковими 9 експериментів та різними – 9 експериментів).

Таблиця 4.6 – Вплив коренів на показники якості системи.

№	K1	K2	K3	Стійкість	Перерег, %	Уст пом	Час ПП, с
1	0.1	0.1	0.1	Стійка	0	0	0.2
2	0.2	0.2	0.2	Стійка	0	0	0.2
3	0.3	0.3	0.3	Стійка	0	0	0.3

Продовження таблиці 4.6

№	K1	K2	K3	Стійкість	Перерег, %	Уст пом	Час ПП, с
4	0.4	0.4	0.4	Стійка	0	0	0.4
5	0.5	0.5	0.5	Стійка	0	0	0.5
6	0.6	0.6	0.6	Стійка	0	0	0.6
7	0.7	0.7	0.7	Стійка	0	0	0.7
8	0.8	0.8	0.8	Стійка	0	0	0.8
9	0.9	0.9	0.9	Стійка	0	0	0.9
10	0.1	0.11	0.12	Стійка	0	-0.68 1.3 -1.955	1.2, 0.2, 0.2
11	0.3	0.4	0.5	Стійка	0	-2.25 3.6 -4.69	1.7, 1.2, 0.2
12	0.01	0.02	0.03	Стійка	0	-6.76 7.2 -7.815	1.1, 1.1, 0.1
13	0.9	0.99	0.3	Стійка	0	7.4 52 -9.5	35.2, 33, 34.6
14	-0.01	-0.1	-0.5	Стійка	9.38 7.1 17.3	-350.06 -19.5 60.45	2.3, 1.2, 0.2
15	0.61	-0.2	0.19	Стійка	0 2 0	-9.832 -46.8325 -30.7	2.3, 1.2, 0.1
16	0.4	-0.3	-0.1	Стійка	0 12.8 4.7	-9.167 42.625 -10.4105	2.1, 1.2, 0.2
17	-0.3	0.6	0.12	Стійка	0	-22.65 88.6 -11.9	2.4, 1.4, 0.4
18	-0.67	0.23	-0.4	Стійка	9.5 0 5	-12.23 -36.54 -42.455	2.3, 1.1, 0.3

Результати, які були проведені в ході досліджень представлених в таблиці 4.6 показали, що у випадку, коли в системі є перехресні зв'язки між входами і виходами при використанні різних коренів виходи системи є стійкими, але неконтрольованими. За успішну побудову регулятора можна було б вважати помилку регулювання біля $\pm 1\%$, але в даному випадку значення виходів є в кілька разів більшими, або меншими, ніж було завдання. У випадку ж з кратними коренями побудова регулятора дає точні вихідні графіки, нульову усталену похибку та нульову перерегулювання. До того ж кратні корені дають регулювання виходів за однаковий час, один раз усталене значення при появі інших впливів ніяк не впливало на значення виходу, при різних же коренях по значеннях часу перехідного процесу чітко простежується зміна значення вихідної величини і відповідно усталення значення затримується, що також є неприпустимим.

Після вище вказаної серії дослідів виявилось, що при різних значеннях коренів, у деяких випадках спостерігалось перерегулювання при додатних коренях і було відсутнє при від'ємних, що суперечить результатам попередніх досліджень. З таблиці 4.6, з перших дев'яти дослідів видно, що всі побудовані регулятори працюють і відповідно можна зробити висновок, що побудова регулятора для таких типів систем є можливою тільки при використанні кратних коренів.

Як і для попередніх систем потрібно перевірити чи є для цього типу систем справедливими знайдені залежності, наприклад залежність величини перерегулювання від величини від'ємних коренів бажаного характеристичного рівняння.

Ще однією серією дослідів для цього типу систем вирішено обрати перевірку залежності величини перерегулювання від величини кореня, але лише для кратних коренів. Серія виконана невеликою, бо потрібно лише перевірити чи справджується ця залежність для систем з перехресними зв'язками у всіх матрицях. Для зручності величини входи системи були встановлені в 1. В таблиці перерегулювання вказане одним числом, що означає ідентичність для всіх виходів.

Таблиця 4.7 – Залежність перерегулювання від величин коренів.

№	K1	K2	K3	Перерегулювання, %
1	-0.1	-0.1	-0.1	10
2	-0.2	-0.2	-0.2	20
3	-0.3	-0.3	-0.3	30
4	-0.4	-0.4	-0.4	40
5	-0.5	-0.5	-0.5	50

Припущення було вірним, що підтвердилось через результати наведені в таблиці 4.7. Перерегулювання відповідає величині від'ємного кореня бажаного характеристичного рівняння системи. Але дивлячись на результати в таблицях 4.6 та 4.7 виявляється, що це працює дійсно не для усіх випадків, а лише тоді, коли побудований регулятор є адекватним.

Порівняння результатів з таблиць 4.3 та 4.7 наведені у вигляді діаграми на рисунку 4.2.

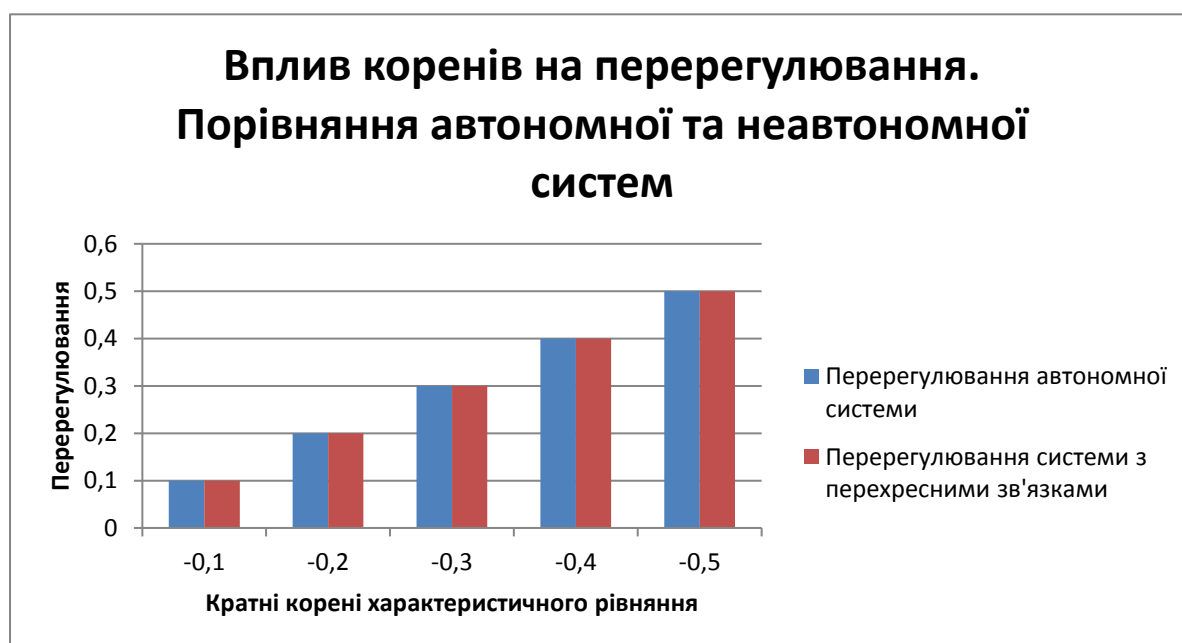


Рисунок 4.2 – Діаграма «Вплив коренів на перерегулювання.

Порівняння автономної та неавтономної систем».

Також вирішено провести ще одну невелику серію з п'яти дослідів, щоб перевірити чи вплине величина входу системи на величину перерегулювання так-само як впливала на нього в дослідженнях попередніх систем. Для проведення цього обрані корені величиною -0.2 , величина вхідного впливу буде змінюватись.

Результати показані в таблиці 4.8.

Таблиця 4.8 – Залежність перерегулювання від величини вхідного впливу.

№	K1	K2	K3	Вхід 1	Вхід 2	Вхід 3	Перерег 1	Перерег 2	Перерег 3
1	-0.2	-0.2	-0.2	1	1	1	0.2	0.2	0.2
2	-0.2	-0.2	-0.2	2	2	2	0.4	0.4	0.4
3	-0.2	-0.2	-0.2	3	3	3	0.6	0.6	0.6
4	-0.2	-0.2	-0.2	4	4	4	0.8	0.8	0.8
5	-0.2	-0.2	-0.2	5	5	5	1	1	1

Як можна побачити з результатів занесених до таблиці 4.8 результати є абсолютно ідентичними до тих, що проводились в розділі 4.2.2 з недіагональною матрицею **A**. Результати двох досліджень ідентичні, що каже про те, що ця властивість даного регулятора присутня і нею можна користуватись при побудові бажаного перехідного процесу.

4.3 Синтез багатовимірних систем з невідомим вектором станів

В попередніх розділах проводилось дослідження систем, які мають виключно теоретичний характер. Стани об'єкту керування знімалися безпосередньо з самого об'єкту ігноруючи те, що реальні системи не дозволяють у більшості випадків виконувати такого роду дії. Для отримання станів об'єкту керування використовують спостерігаючі пристрої.

Спостерігаючі пристрої – це об'єкти, які дозволяють за входами і виходами системи відновлювати початковий вектор станів реального об'єкту керування. Завдяки цьому регулятор, буде використовувати відновлені стани об'єкту, а не реальні, зняті напряму з ОК.

Модель досліджуваної системи з спостерігаючим пристроєм представлена на рисунку 4.3.

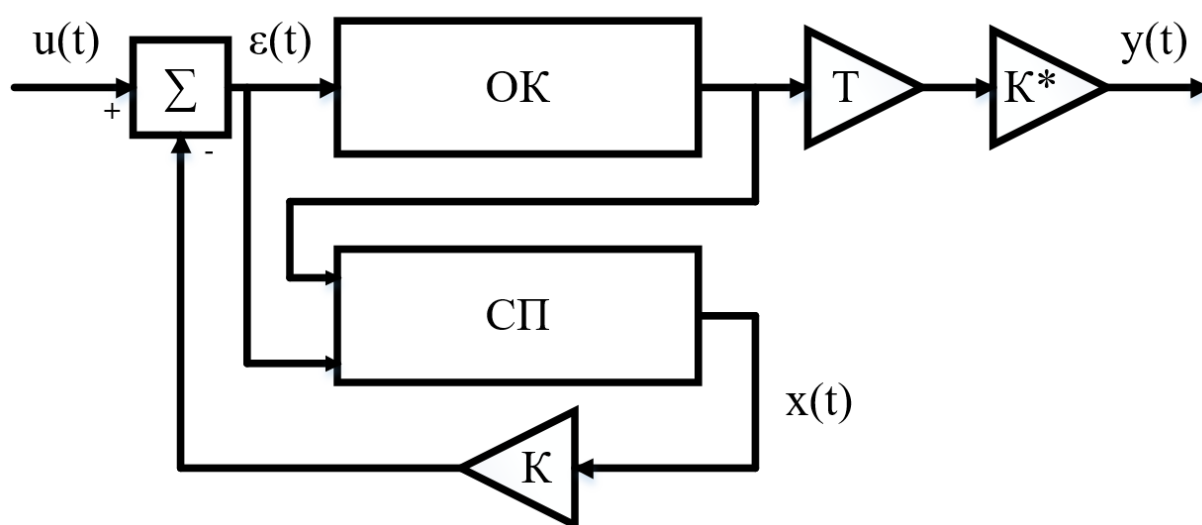


Рисунок 4.3 – Схема моделювання зі спостерігаючим пристроєм.

Розробимо модель цифрової системи з регулятором, який об'єднує функції регулювання та спостереження, рисунок 4.4.

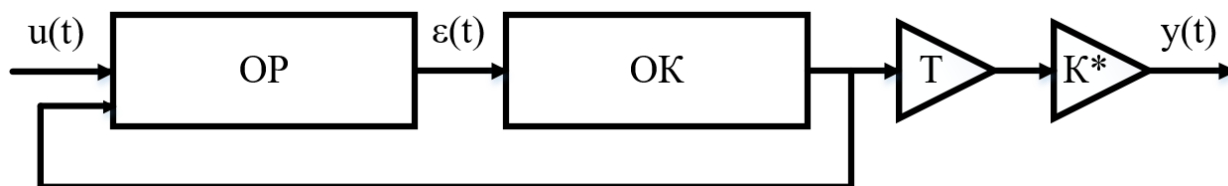


Рисунок 4.4 – Схема моделювання з об'єднаним регулятором.

4.3.1 Об'єднаний регулятор автономної системи

Для побудови об'єданого регулятора автономної системи використовується модель з розділу 4.2.1. Для зручності вона продубльована далі, як формула (4.5)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Першим кроком потрібно перевірити спостережуваність системи, рисунок 4.5, чи можливо взагалі відновити стани об'єкту керування за його входами та виходами.

```

>> P = obsv(A1,C1);
>> rank(P)

ans =

3

```

Рисунок 4.5 – Визначення рангу матриці спостережуваності.

На рисунку 4.5 ранг матриці спостережуваності 3, що відповідає рангу системи і означає, що для даної моделі можна побудувати спостерігаючий пристрій.

Далі для побудови спостерігаючого пристрою потрібно знайти матрицю **H** коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою. Для цього скористаємось пакетом MatLab. Розрахована матриця представлена на рисунку 4.6. В формулі, що використовується для цього присутній третій аргумент, це корені бажаного характеристичного рівняння системи, взяті з від'ємним знаком.

```

>> H = (place(A1',C1',[-0.1 -0.1 -0.1]))'

H =

1.7000    0    0
0    9.1000    0
0    0    0.2333

```

Рисунок 4.6 – Матриця **H** коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою.

Матриці векторно-матричної моделі спостерігаючого пристрою, отримані в ході розрахунків, показані на рисунку 4.7 повинні бути перевірені в Simulink на достовірність роботи.

На основі цієї матриці можна скористатись формулами для побудови спостерігаючого пристрою.

```
>> Asp = A1 - H*C1
Asp =
    -0.1000         0         0
         0    -0.1000         0
         0         0    -0.1000

>> Bsp = [B1 H]
Bsp =
    2.0000         0         0    1.7000         0         0
         0    -2.0000         0         0    9.1000         0
         0         0    2.0000         0         0    0.2333

>> Csp = eye(3)
Csp =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> Dsp = [zeros(3) zeros(3)]
Dsp =
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
```

Рисунок 4.7 – Формули розрахунку та вигляд матриць моделі спостерігаючого пристрою.

Для перевірки роботи спостерігаючого пристрою була побудована схема в середовищі Simulink за шаблоном з рисунку 4.3. Для перевірки правильності виходу спостерігаючого пристрою з об'єкту керування була винесена матриця C , а замість неї поставлена одинична матриця третього порядку, що дозволило отримати стани об'єкту керування на виході блоку State-Space. Це було зроблено для порівняння станів об'єкту керування, так-званого “справжнього” вектору станів та відновленого за допомогою спостерігаючого пристрою

Графіки векторів станів об'єкту керування та спостерігаючого пристрою представлені на рисунку 4.8.

Судячи з рисунку 4.8 спостерігаючий пристрій можна вважати адекватним, бо реальні стани об'єкту керування та відновлені за допомогою спостерігаючого пристрою за входом та виходом мають ідентичні графіки. Можна використовувати даний спостерігаючий пристрій, щоб на його основі будувати об'єднаний регулятор.

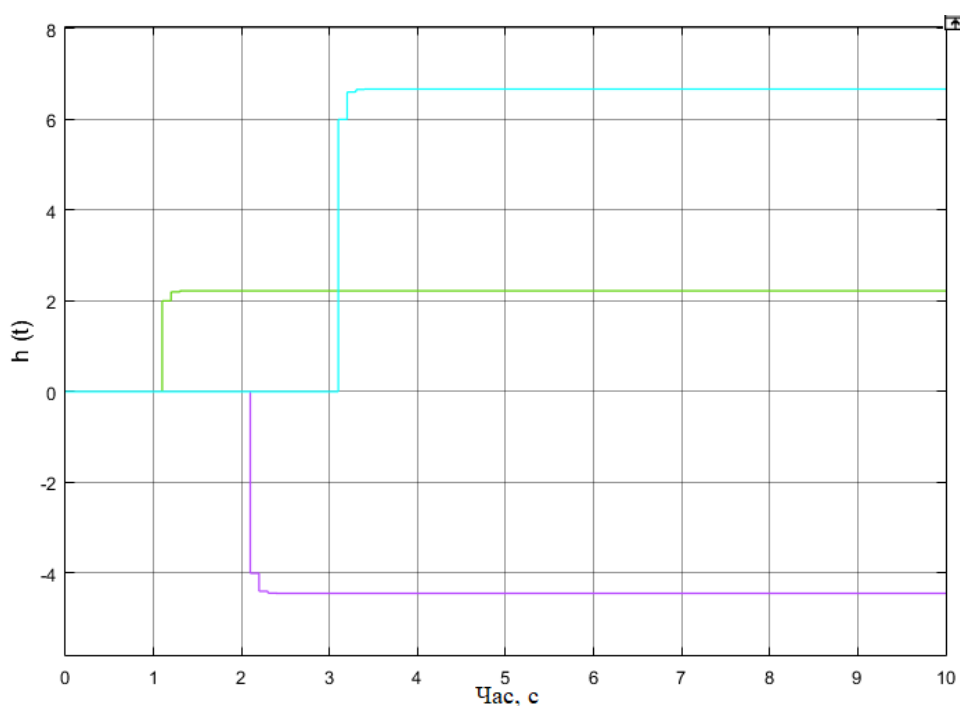


Рисунок 4.8 – Порівняння графіків векторів станів об’єкту та спостерігаючого пристрою.

Об’єднаний регулятор будується у вигляді структурної схеми представленої на рисунку 4.4. Формули для побудови об’єданого регулятора наступні:

$$A_p = [A_{sp} - B * K]$$

$$B_p = [B_{sp}]$$

(4.6)

$$C_p = [-K]$$

$$D_p = [E \ 0]$$

Використовуючи формули (4.6) можна розрахувати об’єднаний регулятор, який буде заміняти собою і спостерігаючий пристрій і регулятор зворотнього зв’язку за станом. До того ж об’єднаний регулятор не вимагає декомпозиції об’єкту керування для того, щоб керувати ним. Розраховані матриці об’єданого регулятора представлені на рисунку 4.9.

```

>> Ap = [Asp-B1*K1]
Ap =
    -5.0000         0         0
         0    -9.0000         0
         0         0    -2.0000

>> Cp = [-K1]
Cp =
    -2.4500         0         0
         0     4.4500         0
         0         0    -0.9500

>> Bp=[B1 H]
Bp =
    2.0000         0         0    -1.7000         0         0
         0    -2.0000         0         0     9.1000         0
         0         0     2.0000         0         0     0.2333

>> Dp = [eye(3) zeros(3)]
Dp =
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0

```

Рисунок 4.9– Розраховані матриці об'єднаного регулятора.

Як можна побачити з рисунку 4.10 побудований об'єднаний регулятор має всі бажані показники якості системи: нульове перерегулювання, нульову усталену похибку, та малий час перехідного процесу.

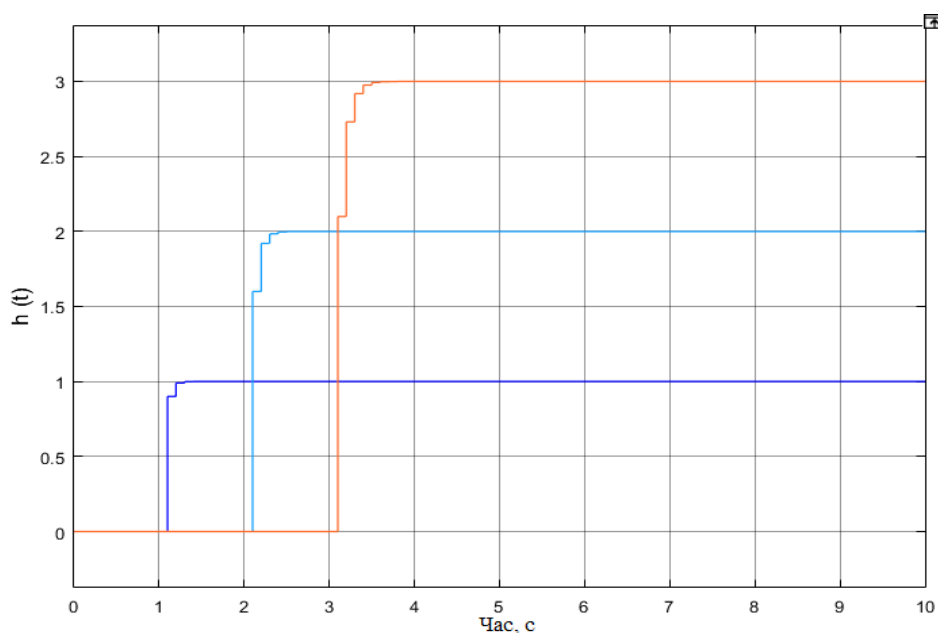


Рисунок 4.10 – Вихідний графік об'єднаного регулятора.

4.3.2 Об'єднаний регулятор системи багатозв'язної за станами.

Для побудови об'єднаного регулятора системи багатозв'язної за станами використовується модель з розділу 4.2.2. Для зручності вона про дубльована далі, як формула (4.7).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 12 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & -11 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Як і в главі 4.3.1 першим кроком треба визначити спостережуваність моделі системи (4.7), рисунок 4.11.

```

>> P = obsv(A1,C1);
>> rank(P)

ans =

     3

```

Рисунок 4.11 – Визначення рангу матриці спостережуваності системи.

Отриманий ранг дорівнює трьом, що збігається з порядком системи, тому можна починати визначення матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою, рисунок 4.12.

```

>> H = (place(A1',C1',[-0.1 -0.1 -0.1]))'

H =

    1.7000    -1.0000    1.3333
    0.6667     9.1000    0.1111
   -1.0000   -11.0000    0.2333

```

Рисунок 4.12 – Визначення матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою.

Використовуючи матрицю, знайдену на рисунку 4.12, знаходимо матриці спостерігаючого пристрою, аналогічно до розділу 4.3.1.

Знайдені матриці спостерігаючого пристрою показані на рисунку 4.13.

```

>> Asp = A1 - H*C1
Asp =
    -0.1000         0         0
         0    -0.1000         0
         0         0    -0.1000

>> Bsp = [B1 H]
>> Bsp
Bsp =
    2.0000         0         0    -1.7000    -1.0000     1.3333
         0    -2.0000         0    -0.6667     9.1000     0.1111
         0         0     1.0000     1.0000    -11.0000     0.2333

>> Csp = eye(3)
Csp =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> Dsp = [zeros(3) zeros(3)]
Dsp =
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0

```

Рисунок 4.13 – Розрахована модель простору станів спостерігаючого пристрою.

Вихідний графік схеми моделювання, порівняння станів ОК, для перевірки роботи спостерігаючого пристрою показано на рисунку 4.14.

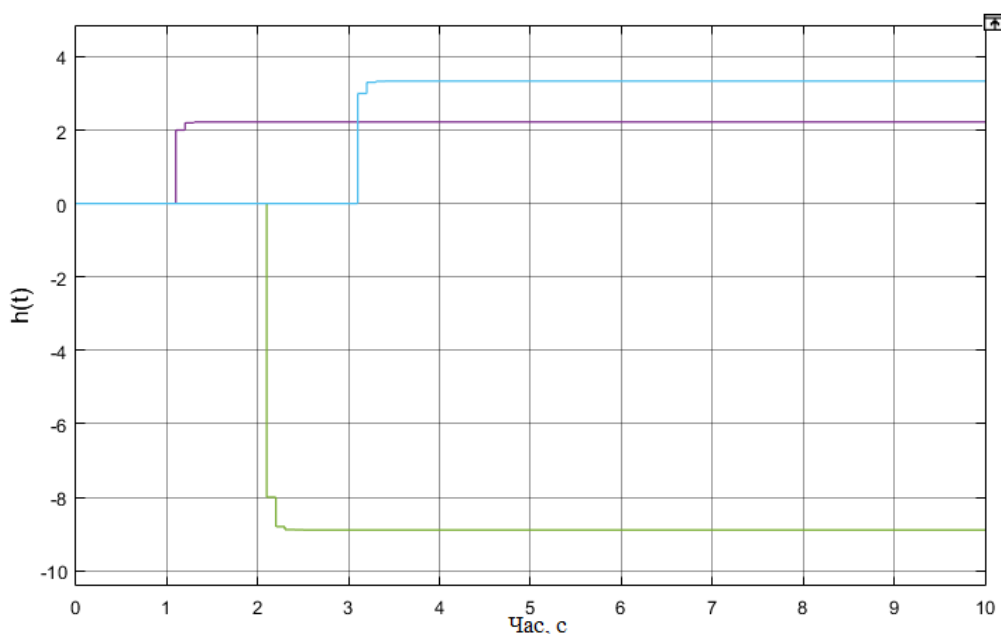


Рисунок 4.14 – Порівняння станів ОК.

З рисунку 4.14 видно, що стани ОК та відновлені стани ОК за допомогою спостерігаючого пристрою ідентичні, отже спостерігаючий пристрій побудовано вірно. Далі потрібно скористатися формулами (4.6) для побудови об'єднаного регулятора системи.

Матриці об'єднаного регулятора представлено на рисунку 4.15.

```

>> Ap = [Asp-B1*K1]
Ap =
    -5.0000    1.0000   -12.0000
    -2.0000   -9.0000    -1.0000
     3.0000   11.0000    -2.0000

>> Cp = [-K1]
Cp =
    -2.4500    0.5000   -6.0000
     1.0000    4.4500    0.5000
     3.0000   11.0000   -1.9000

>> Bp=[B1 H]
Bp =
    2.0000     0     0   -1.7000   -1.0000    1.3333
     0   -2.0000     0   -0.6667    9.1000    0.1111
     0     0    1.0000    1.0000   -11.0000    0.2333

>> Dp = [eye(3) zeros(3)]
Dp =
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0

```

Рисунок 4.15 – Розрахована модель простору станів об'єднаного регулятора.

Для перевірки роботи об'єднаного регулятора використана схема, аналогічна до використаної в попередньому розділі, вона має вигляд схожий до рисунку 4.4.

Вихід схеми показано на рисунку 4.16.

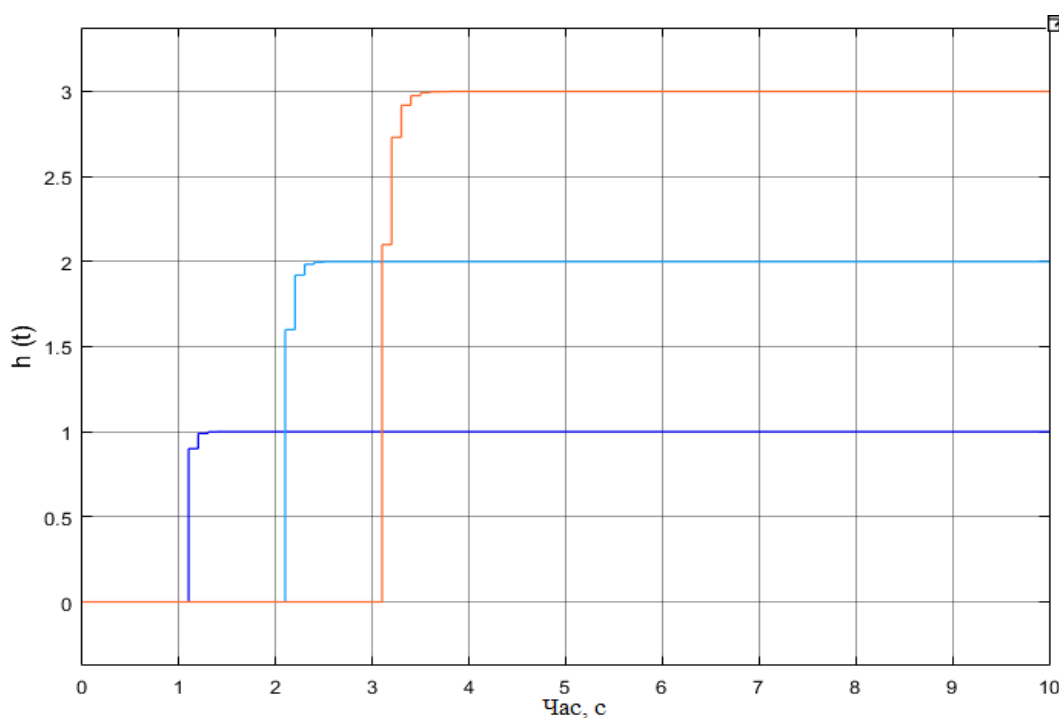


Рисунок 4.16 – Вихід схеми перевірки роботи об'єднаного регулятора.

Об'єднаний регулятор працює добре, що видно з рисунку 4.16 регулятор чітко відпрацьовує поставлене завдання при цьому маючи початкові показники якості системи.

4.3.3 Об'єднаний регулятор системи багатозв'язної за станами, входами та виходами.

Для перевірки побудови об'єданого регулятора системи з недіагональними матрицями **A**, **B** і **C** для зручності продублюємо модель системи з розділу 4.2.3 в якості формули (4.8).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 98 & -1 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 14 & -2 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & -0.2 \\ 122 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 9 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Перевіримо спостережуваність заданої системи (4.8), рисунок 4.17.

```
>> obsv(A1,C1);
>> rank(ans)

ans =
```

3

Рисунок 4.17 – Результат визначення рангу спостережуваності системи.

Ранг матриці спостережуваності, як видно з рисунку 4.17 відповідає порядку системи, тому це означає, що можливо побудувати спостерігаючий пристрій, а потім і об'єднаний регулятор.

Для розрахунку спостерігаючого пристрою спочатку знайдемо матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою. Її представлено на рисунку 4.18.

```
>> H = (place(A1',C1',[-0.1 -0.1 -0.1]))'
```

H =

-60.0000	-1.4038	0.4038
404.5000	9.9038	-0.8038
-55.5000	-0.5916	-0.4084

Рисунок 4.18 – Матриця коефіцієнтів зворотнього зв'язку за спостерігаючого пристрою.

Розрахунок матриць спостерігаючого пристрою показано на рисунку 4.19, він проводиться аналогічно до попередніх глав.

```
>> Asp = A1 - H*C1
```

Asp =

-0.1000	0	-0.0000
-0.0000	-0.1000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.1000

```
>> Csp = eye(3)
```

Csp =

1	0	0
0	1	0
0	0	1

```
>> Bsp = [B1 H]
```

Bsp =

2.0000	4.0000	2.0000	-60.0000	-1.4038	0.4038
14.0000	-2.0000	-8.0000	404.5000	9.9038	-0.8038
-1.0000	1.0000	2.0000	-55.5000	-0.5916	-0.4084

```
>> Dsp = [zeros(3) zeros(3)]
```

Dsp =

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Рисунок 4.19 – Розраховані матриці моделі простору станів спостерігаючого пристрою.

Порівняння станів об'єкту керування та спостерігаючого пристрою показано на рисунку 4.20.

Оскільки спостерігаючий пристрій працює вірно, то можна переходити до етапу розрахунку матриць моделі об'єднаного регулятора. Їх розрахунок проводить аналогічно, до попередніх розділів, за формулами (4.6). Розраховані матриці об'єднаного регулятора представлені на рисунку 4.21.

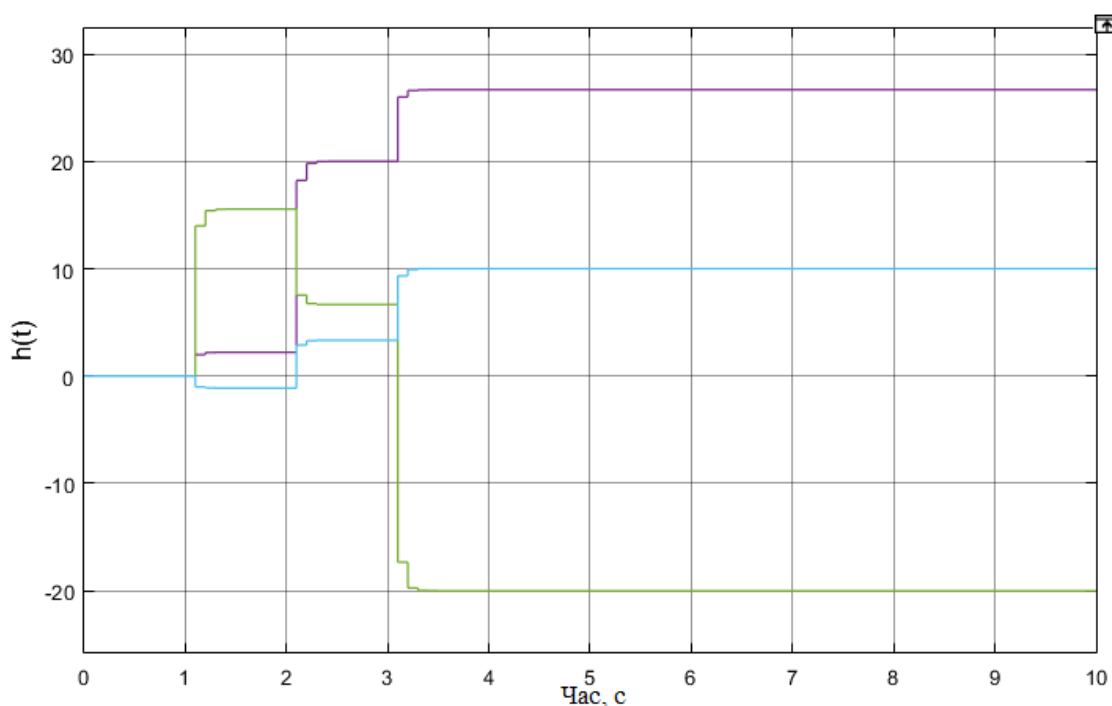


Рисунок 4.20 – Порівняння станів об'єкту керування та спостерігаючого пристрою.

```
>> Ap = [Asp-B1*K1]
```

```
Ap =
```

```
-5.0000    1.0000   -3.0000
-2.0000   -9.0000   -1.0000
-98.0000    1.0000   -2.0000
```

```
>> Bp=[B1 H]
```

```
Bp =
```

```
2.0000    4.0000    2.0000  -60.0000  -1.4038    0.4038
14.0000   -2.0000   -8.0000  404.5000    9.9038   -0.8038
-1.0000    1.0000    2.0000  -55.5000   -0.5916   -0.4084
```

```
>> Cp = [-K1]
```

```
Cp =
```

```
-57.0083   -0.6125   -0.9833
 88.0417    0.6125    0.6167
-121.5250  -0.1125   -1.7500
```

```
>> Dp = [eye(3) zeros(3)]
```

```
Dp =
```

```
2.0000    4.0000    2.0000  -60.0000  -1.4038    0.4038    1    0    0    0    0    0
14.0000   -2.0000   -8.0000  404.5000    9.9038   -0.8038    0    1    0    0    0    0
-1.0000    1.0000    2.0000  -55.5000   -0.5916   -0.4084    0    0    1    0    0    0
```

Рисунок 4.21 – Розраховані матриці моделі простору станів об'єднаного регулятора.

Схема моделювання аналогічна до попередніх розділів, результат моделювання, вихід схеми, представлено на рисунку 4.22.

З рисунку 4.22 видно, що об'єднаний регулятор працює. Показники якості системи не відрізняються від початкової схеми.

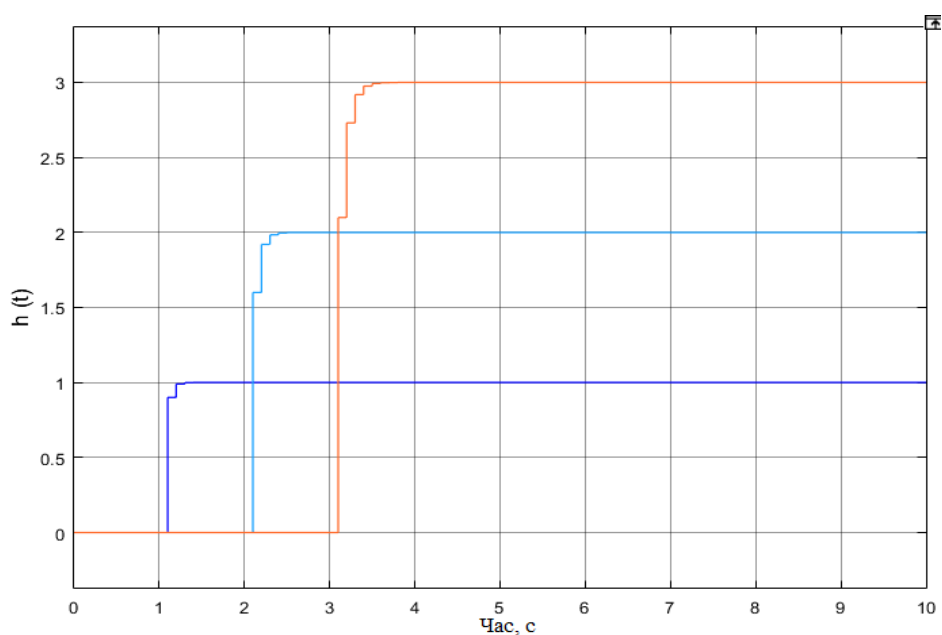


Рисунок 4.22 – Вихід схеми моделювання з об'єднаним регулятором.

Висновки до розділу 4.

В ході проведення експериментальних досліджень роботи методу синтезу багатовимірного регулятора проводилися дослідження над наступними типами багатовимірних об'єктів керування: автономною системою, багатозв'язною системою за станами та багатозв'язною системою за станами, входами та виходами.

Дослідження проводились за напрямками:

- вплив коренів характеристичного рівняння на показники якості синтезованої системи;
- вплив часу квантування на час перехідного процесу;
- можливість використання запропонованих аналітичних моделей для синтезу цифрових багатовимірних систем з невідомим вектором станів;
- виконання синтезу цифрових багатовимірних систем з узагальненим регулятором.

В ході проведення досліджень першої частини розділу були виявлені деякі залежності, що дозволяють проводити налаштування перехідного процесу, а саме: залежність величини перерегулювання від величини обраного від'ємного кореня

характеристичного рівняння системи, залежність часу перехідного процесу від величини кореня характеристичного рівняння та обраного часу квантування. Також варто відзначити, що серед інших особливостей було виявлено, що час квантування збільшує загальний час перехідного процесу, але не збільшує кількість кроків, що потрібні для досягнення «тунелю» $\pm 5\%$ від усталеного значення виходу. Так наприклад при значенні кореню у 0.1 перехідний процес для будь-якого вхідного сигналу проходив за 2 кроки, і знаючи це, можна гнучко підлаштовувати час встановлення функції через час квантування.

В ході першої частини досліджень виявилось, що при синтезі автономних систем та систем багатозв'язних за станами бажані корені характеристичного рівняння системи можуть бути обрані будь-якими у той час, як для системи багатозв'язної за станами, входами та виходами можна обирати лише кратні корені для досягнення максимальної роботи.

В ході дослідження роботи методу синтезу регулятора при невідомому векторі станів виявилось, що отримуваний регулятор може бути включений до об'єднаного регулятора і при цьому система має ті ж показники якості, що і за звичайного способу регулювання і при цьому не відбувається втручання у вектор станів об'єкту керування.

5 СИНТЕЗ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ З НЕКВАДРАТНИМИ МАТРИЦЯМИ

5.1 Огляд обмежень методу синтезу

На теперішній час опубліковано цілий ряд робіт, які розглядають теоретичні питання аналізу та синтезу цифрових систем на базі методу простору-станів. Як відомо, при використанні зазначеного методу, динаміка систем описується диференційними рівняння стану та виходу виду (5.1).

$$\begin{cases} x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] \\ y[n] = Cx[n] + Du[n] \end{cases}, \quad (5.1)$$

де A, B, C і D – матриці відповідних розмірностей.

Хоча кожна досліджувана модель має свої особливості, при виконанні синтезу, всі вони об'єднані схожою структурою регулятора, а саме створенням зворотного зв'язку за станом, який забезпечує задане розташування полюсів замкнутої системи. При цьому вираз для керуючого впливу має вигляд (5.2)

$$u[n] = -Kx[n] \quad (5.2)$$

де K - матриця зворотних зв'язків за станом.

У відповідності до формули Р. Ізермана [5], матриця зворотних зв'язків за станом розраховується як (5.3).

$$K = [CB]^{-1}[CA - TC], \quad (5.3)$$

де T - матриця власних значень системи.

Запишемо вираз (5.3) через розмірності матриць в загальному вигляді для визначення результуючої розмірності матриці K .

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= [(\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{n})(\mathbf{n} \mathbf{x} \mathbf{r})]^{-1}[(\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{n})(\mathbf{n} \mathbf{x} \mathbf{n}) - (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{l})(\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{n})] = \\
&= [(\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{r})]^{-1}[(\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{n}) - (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{n})] = (\mathbf{r} \mathbf{x} \mathbf{l})(\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{n}) = (\mathbf{r} \mathbf{x} \mathbf{n}).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Для забезпечення заданих показників якості використовуємо формулу визначення корегувальних коефіцієнтів.

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}_h^{-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} \end{vmatrix}^{-1} \mathbf{E} \tag{5.5}$$

$$\mathbf{K}_h = \begin{vmatrix} k_{h11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{h22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{hlr} \end{vmatrix} \quad k_{hij} = c_{ii} b_{jj} \quad i = 1, 2 \dots l; j = 1, 2 \dots r \tag{5.6}$$

Де z_1, z_2 - бажані корені.

Підставивши в формулу (5.5) розмірності відповідних матриць, визначимо умову коректності вибору розмірностей для можливості проведення синтезу багатозв'язної цифрової системи з неквадратними матрицями (5.7).

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^* &= (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{l})^{-1} (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{r})^{-1} (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{l})^{-1} (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{l}) = \\
&= (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{l}) (\mathbf{r} \mathbf{x} \mathbf{l}) (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{l}) (\mathbf{l} \mathbf{x} \mathbf{l})
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Таким чином, відповідно до виразу (5.7), використати метод синтезу для неквадратних матриць можна лише у випадку коли $r = l$.

5.2 Синтез багатовимірних систем керування з неквадратними матрицями керування та виходу.

5.2.1 Модель автономної системи

Аналогічно до попередніх розділів варто першою перевірити модель системи у якій не було б зв'язків між станами, входами та виходами. Такі системи представляються діагональними матрицями **A**, **B** і **C**. Як уже було визначено в попередньому розділі побудова регулятора можлива лише у випадку, коли матриці **B** і **C** мають однакову кількість стовбців та рядків відповідно. За таких умов можна керувати кожним виходом і при цьому отримати гарні показники якості системи. Обрана модель представлена у якості формули (5.8).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Маючи систему, з моделлю типу (5.8) система не має зв'язків між каналами і регулятор має працювати як очікується.

Перевіримо керованість системи рисунок 5.1.

```
>> P = ctrb(A1,B1)

P =

    2.0000         0   -0.6000         0    0.1800         0
         0    2.0000         0   -0.4000         0    0.0800
         0         0         0         0         0         0

>> rank(P)

ans =

    2
```

Рисунок 5.1 – Перевірка керованості системи.

З рисунку 5.1 можна сказати, що система не керована, але враховуючи, що третій стан не впливає на систему, то можна вважати, що система другого порядку і можна спробувати побудувати регулятор. Далі переходимо до побудови регулятора для даної системи рисунок 5.2.

```
>> K1 = inv(C1*B1)*(C1*A1 - T1*C1)

K1 =

    -0.2000         0         0
         0    -0.2000         0

>> Kg1 = inv(T1)*inv(C1*B1)*inv([1.11 0;0 1.25])*eye(2)

Kg1 =

    -1.5015         0
         0     2.0000
```

Рисунок 5.2 – Матриці синтезованого регулятора.

Далі побудувавши схему моделювання можна отримати вихідні графіки, як на рисунку 5.3.

Як можна побачити з рисунку 5.3 графіки системи мають високі показники якості, тому з цього можна судити про успішну роботу регулятора. Наступним кроком перевіримо роботу об'єднаного регулятора даної системи, пропускаючи побудову спостерігаючого пристрою.

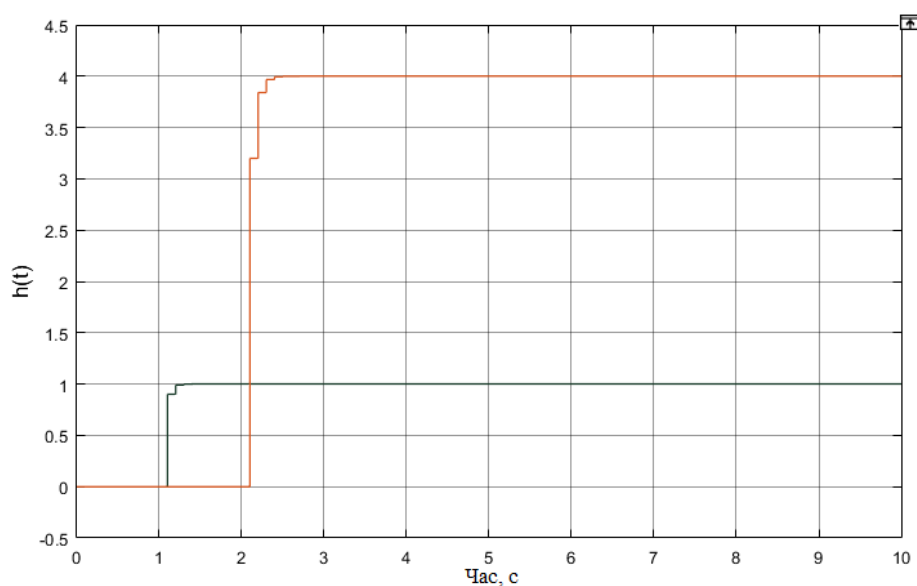


Рисунок 5.3 – Вихід схеми моделювання з регулятором.

Перевіримо спостережуваність системи, рисунок 5.4.

```
>> P = obsv(A1,C1)

P =

    -3.0000         0         0
         0     1.0000         0
    0.9000         0         0
         0    -0.2000         0
   -0.2700         0         0
         0     0.0400         0

>> rank(P)

ans =

     2
```

Рисунок 5.4 – Перевірка спостережуваності системи.

Система не є спостережуваною в даному випадку, але третій стан системи не потрібно регулювати, бо він не змінюється і відновлювати потрібно лише 2 стани, можна спробувати побудувати спостерігаючий пристрій та об'єднаний регулятор. Розрахуємо матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою, рисунок 5.5.

```
>> H = (place(A1',C1',[-0.1 -0.2 0]))'

H =

    0.0333         0
         0    -0.2000
         0         0
```

Рисунок 5.5 – Матриця коефіцієнтів зворотнього зв'язку спостерігаючого пристрою.

Побудувавши спостерігаючий пристрій можна отримати порівняння станів ОК після додавання його до схеми моделювання, рисунок 5.6.

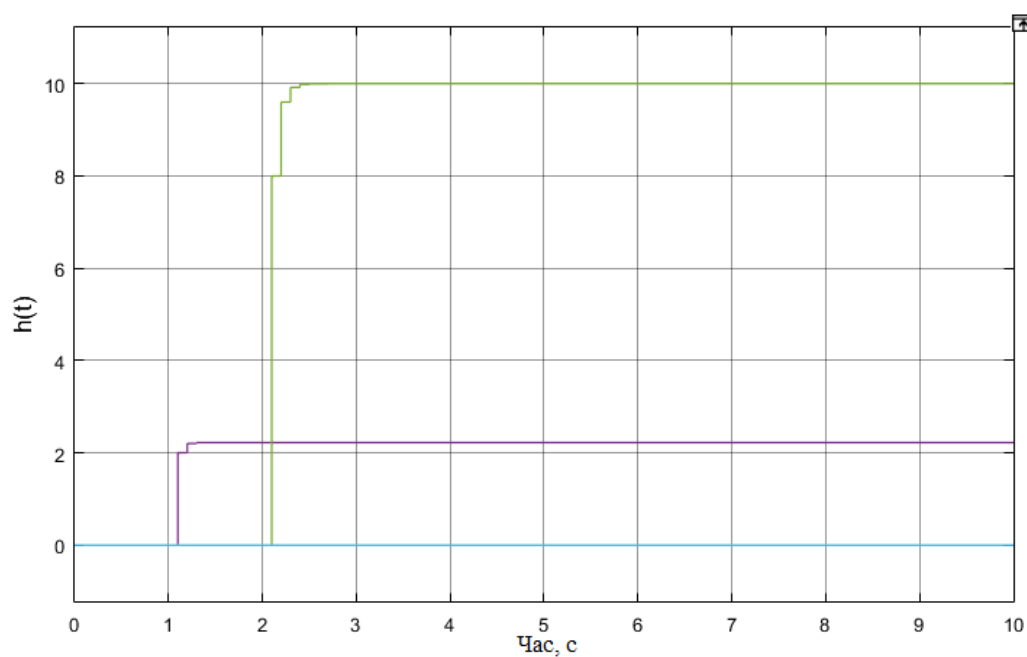


Рисунок 5.6 – Порівняння станів ОК та спостерігаючого пристрою.

Розрахунок матриць об'єднаного регулятора представлено на рисунку 5.7.

```
>> Ap = [Asp-B1*K1]
```

Ap =

```
0.2000    0    0
    0    0.4000    0
    0    0   -0.1000
```

```
>> Cp = [-K1]
```

Cp =

```
0.2000    0    0
    0    0.2000    0
```

```
>> Bp=[B1 H]
```

Bp =

```
2.0000    0    0.0333    0
    0    2.0000    0   -0.2000
    0    0    0    0
```

```
>> Dp = [1 0 0 0;0 1 0 0];
```

Рисунок 5.7 – Розраховані матриці об'єднаного регулятора.

Графік виходу схеми з об'єднаним регулятором представлено на рисунку 5.8.

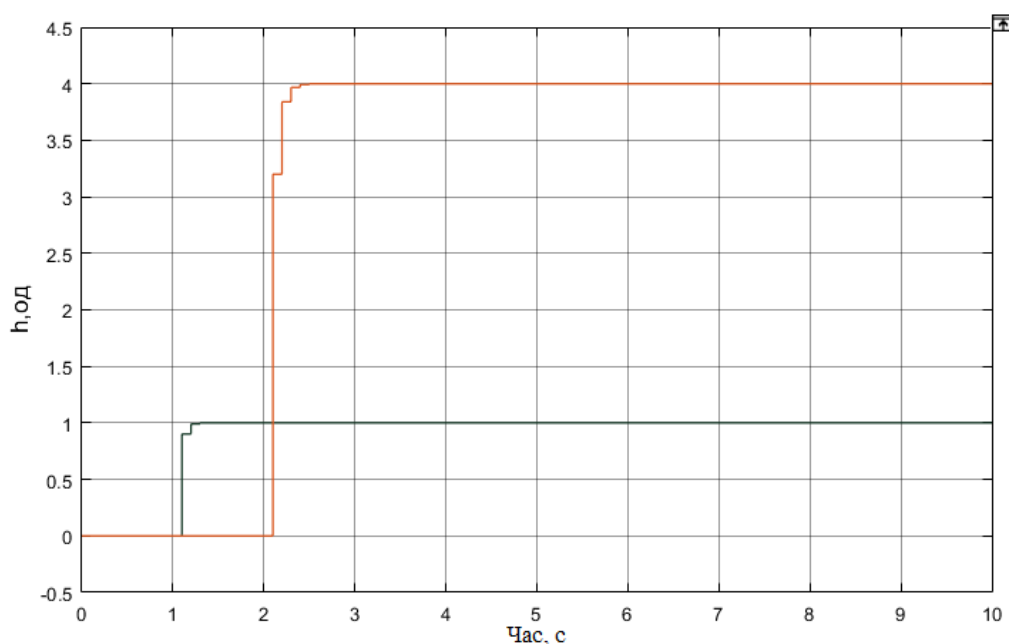


Рисунок 5.8 – Вихід об'єднаного регулятора.

5.2.2 Модель багатозв'язної за станами, входами та виходами системи.

В попередньому розділі вдалося побудувати регулятор для системи без зв'язків між каналами в матрицях, але такі системи є дуже рідкісними і фактично це був би ідеальний варіант системи. Частіше між каналами є зв'язки того чи іншого роду, тому потрібно перевірити, як працює метод для систем з перехресними зв'язками між станами системи.

Для моделювання була обрана система виду (5.9).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -0.3 & 3 & 0.1 \\ -0.1 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & -0.1 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Для даної системи аналогічно до попереднього розділу потрібно знайти матрицю керованості системи, рисунок 5.9.

Ранг матриці керованості рівний трьом. Що означає про керованість системи, можна спробувати синтезувати регулятор для системи, рисунок 5.10.

```
>> P = ctrb(A1,B1)

P =

Columns 1 through 5

    2.0000    3.0000   -3.6000    5.1000    1.9800
   -1.0000    2.0000    0.3000   -1.3000    0.2100
    1.0000    1.0000    0.9000    4.9000   -3.3900

Column 6

   -5.4300
    0.1400
    3.3100
```

Рисунок 5.9 – Розрахунок матриці керованості системи.

```
>> K1 = inv(C1*B1)*(C1*A1 - T1*C1)

K1 =

   -20.9000    7.8000    3.6000
    15.2294   -4.6588   -2.6471

>> Kg1 = inv(T1)*inv(C1*B1)*inv([1.11 0;0 1.11])*eye(2)

Kg1 =

    90.0901   -18.0180
   -63.5930    13.2485
```

Рисунок 5.10 – Матриці регулятора системи.

Вихід системи з регулятором представлено на рисунку 5.11.

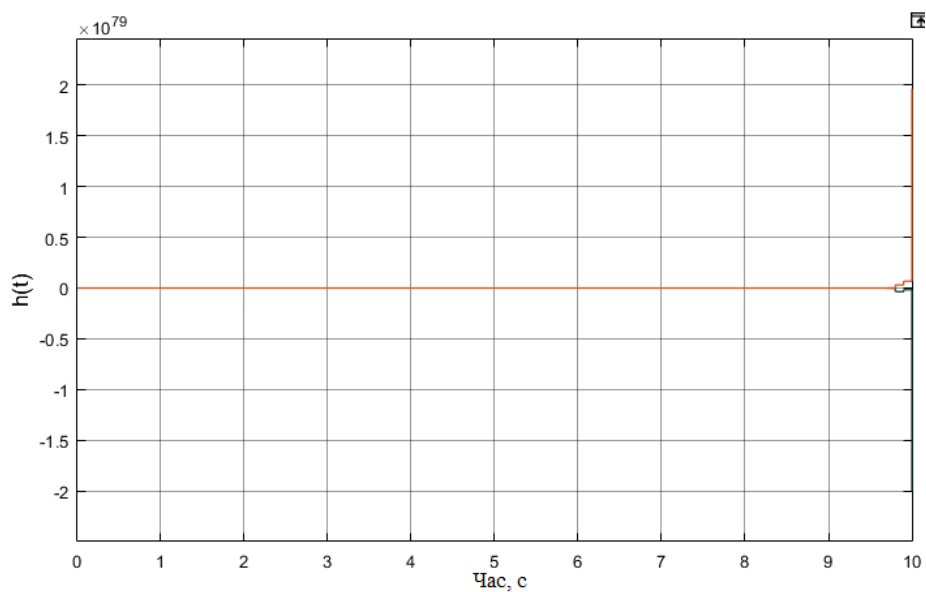


Рисунок 5.11 – Графік виходу системи с регулятором.

При тому, що система керована в ній є третій стан, яким неможливо керувати через відсутність третього вхідного впливу. Не врахувавши це для систем схожого типу буде неможливо побудувати регулятор. Для визначення типів систем для яких можна побудувати регулятор потрібно провести перевірку побудов різних систем такого типу і визначити у яких випадках регулятор буде працювати адекватно.

Провівши дослідження різних типів систем експериментально було визначено як буде виглядати модель простору станів (5.10).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \text{Ч} & \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} & \text{Ч} \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \text{Ч} & \text{Ч} & 0 \\ \text{Ч} & \text{Ч} & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

В моделі (5.10) літерою «Ч» відмічені позиції де може бути будь-яке число. В матриці \mathbf{A} неважливо як будуть формуватися стани, навіть якщо система буде нестійкою регулятор станів зможе їх розв'язати і зробити систему стійкою, аналогічно як і в матриці \mathbf{B} , її елементи можуть бути будь-якими, тому що стани ОК не впливають на вихід. До матриці \mathbf{C} є головна вимога: в стовбці зі станом, який змінюється неконтрольовано мають бути нулі, щоб неконтрольований стан не впливав на виходи системи. За таких умов як би сильно не змінювались стани, які формують виходи системи регулятор зможе компенсувати їх. Так за вигляду системи (5.10) запропонований регулятор може працювати.

Виконаємо моделювання системи (5.9) змінивши її до вигляду (5.11).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -0.3 & 3 & 0.1 \\ -0.1 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & -0.1 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

За вигляду (5.11) система має структуру, як (5.10) і можна відмітити, що в матриці C , третій стан ніяк не впливає на формування виходу системи, в такому випадку можливо побудувати регулятор, який зможе точно регулювати вихідні величини.

Перевіримо керованість заданої системи, рисунок 5.12.

```
>> P = ctrb(A1,B1)

P =

    2.0000    3.0000   -3.5000    5.2000    2.0400   -4.9700
   -1.0000    2.0000    0.3000   -1.3000    0.2000    0.1300
    1.0000    1.0000    0.9000    4.9000   -3.2900    3.4100

>> rank(P)

ans =

    3
```

Рисунок 5.12 – Матриця керованості системи.

Система є керованою, оскільки ранг матриці керованості відповідає порядку системи. Наступним кроком потрібно синтезувати регулятор для системи (5.11), рисунок 5.13.

```
>> K1 = inv(C1*B1)*(C1*A1 - T1*C1)

K1 =

   -0.0714    1.1143    0.0286
   -0.0857    0.2571    0.0143

>> Kg1 = inv(T1)*inv(C1*B1)*inv([1.11 0;0 1.11])*eye(2)

Kg1 =

    7.3543   -3.1256
   -2.7579    2.2982
```

Рисунок 5.13 – Матриці регулятора.

Перевіримо роботу системи керування на схемі моделювання. Вихід схеми моделювання показано на рисунку 5.14.

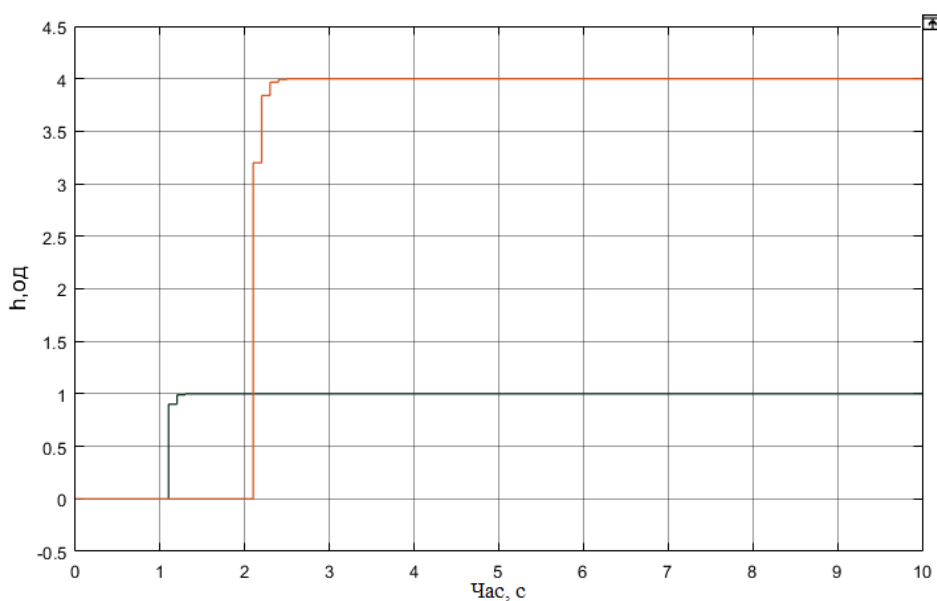


Рисунок 5.14 – Вихідні графіки схеми моделювання.

Як можна побачити з рисунку 5.14, на відміну від результату отриманого на рисунку 5.11, система має бажані показники якості. Побудова об'єднаного регулятора проводиться аналогічно до усіх попередніх випадків з перевіркою системи на спостережуваність, побудовою спостерігаючого пристрою і в решті-решт об'єднаним регулятором.

Аналогічно до попередніх дослідів знайдемо матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою **H**, рисунок 5.15.

```
>> H = (place(A1',C1',[-0.1 -0.1 0]))'
```

```
H =
```

```

-4.5000    2.5500
 0.5000   -0.3500
-0.7143    0.9286
```

Рисунок 5.15 - Матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку спостерігаючого пристрою.

Модель спостерігаючого пристрою, знайдена за допомогою матриці **H** показана на рисунку 5.16.


```

>> Asp = A1 - H*C1
Asp =
    0.0000    -0.0000    0.1000
   -0.0000   -0.1000         0
   -0.0000   -0.0000   -0.1000

>> Csp = eye(3)
Csp =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> Bsp = [B1 H]
Bsp =
    2.0000    3.0000   -4.5000    2.5500
   -1.0000    2.0000    0.5000   -0.3500
    1.0000    1.0000   -0.7143    0.9286

>> Dsp = [0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]
Dsp =
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

```

Рисунок 5.16 – Модель простору станів спостерігаючого пристрою

Розглянемо порівняння станів об'єкту керування та спостерігаючого, рисунок 5.17.

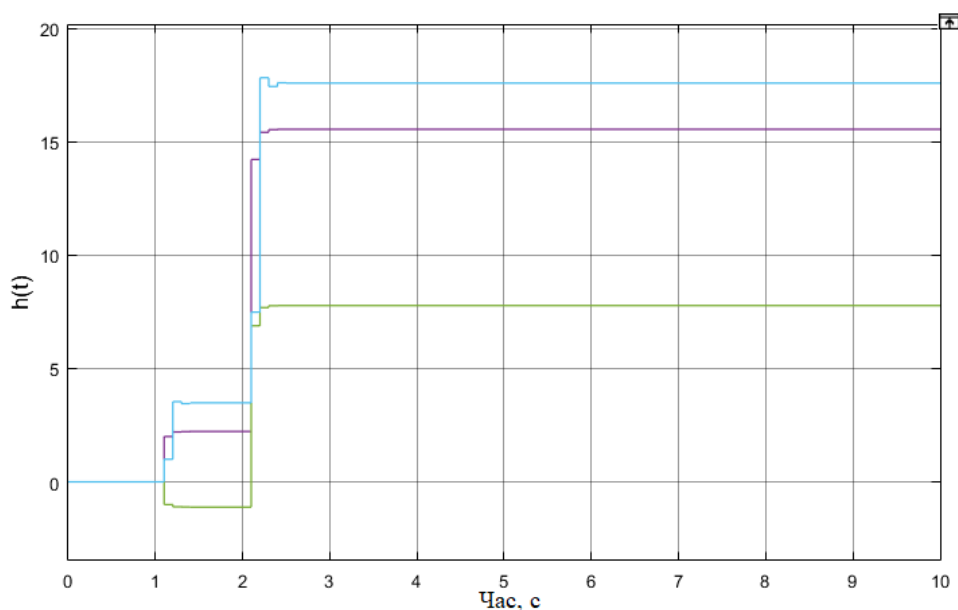


Рисунок 5.17 – Порівняння векторів станів об'єкту керування та спостерігаючого пристрою.

На основі синтезованого спостерігаючого пристрою, котрий працює вірно, судячи з векторів станів з рисунку 5.17 можна виконати синтез об'єднаного регулятора.

Для прикладу модель об'єднаного регулятора представлена на рисунку 5.18.

```

>> Ap = [Asp-B1*K1]
Ap =
    0.4000   -3.0000         0
    0.1000    0.5000   -0.0000
    0.1571   -1.3714   -0.1429

>> Cp = [-K1]
Cp =
    0.0714   -1.1143   -0.0286
    0.0857   -0.2571   -0.0143

>> Dp = [1 0 0 0; 0 1 0 0]
Dp =
    1     0     0     0
    0     1     0     0

>> Bp=[B1 H]
Bp =
    2.0000    3.0000   -4.5000    2.5500
   -1.0000    2.0000    0.5000   -0.3500
    1.0000    1.0000   -0.7143    0.9286

```

Рисунок 5.18 – Модель простору-станів об'єднаного регулятора системи.

Вихідні графіки системи з об'єднаним регулятором є аналогічними до виходу з рисунку 5.14.

Як і було описано вище, всі проблеми з синтезом регулятора були обумовлені неможливістю контролювати один із каналів системи. Це можна було б вирішити додаванням ще одного входу для системи, але це б змінило математичну модель і, як показано в розділі 5.1 для моделі в якій кількість входів $r \neq l$ не можна синтезувати матрицю поправочних коефіцієнтів через обмеження у розмірностях матриць для формули.

Висновки до розділу 5

В даному розділі розглядався метод побудови регулятора для багатовимірних систем, запропонований для систем з неквадратними матрицями **B** і **C**.

По-перше, розглядалися обмеження методу відносно розмірностей матриць. Визначено, що для успішної побудови регулятора потрібно, щоб у системи була однакова кількість входів та виходів, це обумовлено структурою формул для розрахунку регулятора, тобто величини r та l кількість стовбців матриці **B** та кількість рядків матриці **C**, відповідно, повинні бути рівними.

По-друге, розглядалось моделювання системи з трьома станами, двома входами і двома виходами. В моделі системи не було перехресних зв'язків між станами,

входами і виходами, тобто система була автономна. Для такої моделі вдалося успішно побудувати регулятор і отримати гарні показники якості системи.

По-третє, взявши за основу вигляд системи (5.10) була обрана нова модель для перевірки синтезу регулятора (5.11) і вона була успішною. Побудований регулятор відкоригував систему так, що вдалося отримати високі показники якості.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання магістерської дисертації вирішена задача підвищення точності багатовимірних цифрових систем керування , а саме:

1. Проведено аналіз різних типів багатовимірних систем керування, моделі яких представлені векторно-матричними моделями у методі простору станів.

2. Виконано розгляд сучасних методів синтезу багатовимірних систем .

3. Розроблена математична модель синтезу багатовимірних цифрових систем керування, а саме виведена нова аналітична формула для матриці коригувальних коефіцієнтів.

4. Запропонована концепція синтезу багатовимірних систем керування підтвердилась серією проведених експериментальних досліджень для різних типів систем керування (автономних, багатозв'язних за станом та багатозв'язних за станом та керуванням та виходом).

5. Проведена серія експериментальних досліджень з визначенням впливу параметрів системи на якість проведення синтезу, у тому числі з невідомим вектором станів.

6. На базі запропонованої математичної моделі розроблено методику синтезу багатовимірних систем керування з неквадратними матрицями **B** і **C**.

7. Всі експериментальні дослідження проводились за допомогою пакету MATLAB/ Simulink.

За результатами досліджень опубліковано статтю та тези доповіді, вони вказані в додатках Б та В відповідно.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления Т.2 Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы/ Д.П. Ким – М.:Физматлит, 2007.-440 с.
2. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления (для инженеров) / П. Деруссо, Ч. Клоуз, Р. Рой. – Москва: Наука, 1970. – 620 с.
3. Стенин В. А. Пространство состояний в задачах автоматизации СЭУ: Учебное пособие / В. А. Стенин. – Северодвинск: Севмашвтуз, 2008. – 92 с.
4. Гуменный Д. Методические материалы для подготовки инженеров. Часть 2: Введение в Теорию Автоматического Управления [Электронный ресурс] / Д. Гуменный, А. Пирумов. – 2018. – Режим доступа до ресурсу:https://www.researchgate.net/publication/327915704_Metodiceskie_materialy_dla_podgotovki_inzenerov_Cast_2_Vvedenie_v_Teoriyu_Avtomaticeskogo_Upravleniya _Methodical_materials_for_the_training_of_engineers_Part_2_Introduction_to_Automatic_Control_Theory_R.
5. Изерман Р. Цифровые системы управления: Пер. с англ. / Р. Изерман. – Москва: Мир, 1984. – 541 с.
6. Динамический режим САУ. Уравнения динамики. [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: <https://www.toehelp.ru/theory/tau/lecture03.htm>.
7. Репнікова Н. Б. Синтез цифрових систем керування з заданим розташуванням полюсів / Н. Б. Репнікова, А. О. Ігнатовська. // 30. – 2017. – №8. – С. 72–77.
8. Пугачёв В. С. Основы автоматического управления. 3-е изд. / Владимир Семёнович Пугачёв. – Москва, 1974.
9. Синтез систем автоматического управления методом модальногоуправления. / В. В.Григорьев, Н. В. Журавлёва, Г. В. Лукьянова, К. А. Сергеев. – Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2007. – 108 с.

10. Матричное уравнение Сильвестра [Электронный ресурс] – Режим доступа до ресурсу: http://mathscinet.ru/course/chapter5_2/.
11. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ / Б. Куо. – Москва: Машиностроение, 1986. – 448 с.
12. Bubnicki Z. Modern Control Theory / Zdzislaw Bubnicki., 2010. – 423 с.
13. Landau I. D. Digital Control Systems / I. D. Landau, G. Zito. – London: Springer-Verlag, 2006. – 484 с.
14. Bakshi U. A. Modern control theory / U. A. Bakshi, M. V. Bakshi. – Pune: Technical Publications Pune, 2008. – 386 с.
15. Дьяконов В. П. VisSim+Mathcad+Matlab. Визуальное математическое моделирование / В. П. Дьяконов. – Москва: СОЛОН – Пресс, 2010.
16. Golnaraghi F. AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS / F. Golnaraghi, B. Kuo. – McGraw – Hill Education, 2017.
17. Nakhmani A. Modern Control: State-Space analysis and design metod / Arie Nakhmani. – McGraw – Hill Education, 2020.

ДОДАТОК А.

Лістинг скрипту MatLab для синтезу запропонованого регулятора.

Скрипт для синтезу матриць регулятора викликається командою, типу:

[матриця регулятора, корегувальна матриця] = Calc_Mat(модель, матриця бажаних коренів), якщо файл зі скриптом знаходиться в кореневій директорії MatLab.

Лістинг:

```
function [k_rev,k_fix]= Calc_Mat(SS,T)
if(length(SS.A)==length(SS.B) && length(SS.C)==length(SS.B))
    k_rev = inv(SS.C*SS.B)*(SS.C*SS.A-T*SS.C);
    temp = eye(length(SS.A));
    temp = temp - T;
    Mat1 = eye(length(SS.A))/temp;
    Kh = eye(length(SS.A));
    for i=1:length(SS.A)
        Kh(i,i) = SS.C(i,i)*SS.B(i,i);
    end
    k_fix = inv(T)*inv(SS.C*SS.B)*inv(Mat1)*eye(length(SS.A));
else
    disp("This method can't be used for such system!")
    k_rev = 0;
    k_fix = 0;
end
end
```

ДОДАТОК Б.

Текст опублікованої статті з журналу «International Scientific Journal “Internauka”».

Технічні науки

УДК 62-52

Репнікова Наталія Борисівна

*к.т.н., доцент, викладач факультету інформатики та обчислювальної
техніки Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

Репникова Наталия Борисовна

*к.т.н., доцент, преподаватель факультета информатики и вычислительной
техники Национального технического университета Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»*

Nataliya Repnikova

*PhD, associated professor of the Faculty of Informatics and Computer Science of the
National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”*

Гнип Владислав Віталійович

*студент 6 курсу факультету інформатики та обчислювальної техніки
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

Гнип Владислав Витальевич

*студент 6 курса факультета информатики и вычислительной техники
Национального технического университета Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского »*

Vladyslav Hnyp

*student of the 6th year Faculty of Informatics and Computer Science of the
National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”*

**УЗАГАЛЬНЕННЯ УМОВ ВИКОНАННЯ СИНТЕЗУ
БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З ЗАДАНОЮ ЯКІСТЮ
ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЙ ВЫПОЛНЕНИЯ СИНТЕЗА
МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАДАНЫМ
КАЧЕСТВОМ
GENERALIZING THE CONDITIONS FOR THE SYNTHESIS OF
MULTICONNECTED CONTROL SYSTEMS WITH A PRESET
QUALITY**

***Анотація.** Розглядається проблема забезпечення високої якості синтезу певного класу систем керування, що описуються векторно-матричними рівняннями. Пропонується узагальнити умови вибору коренів характеристичного рівняння і розмірності нульових елементів відповідних матриць для синтезу цифрових багатозв'язних систем керування. Приведено результати моделювання з використанням прикладного пакету Matlab/Simulink.*

***Ключові слова:** якість синтезу, векторно-матричні рівняння, розмірність матриць, багатозв'язні цифрові системи.*

***Аннотация.** Рассматривается проблема обеспечения высокого качества синтеза определенного класса систем управления, которые описываются векторно-матричными уравнениями. Предлагается обобщить условия выбора корней характеристического уравнения и размерности нулевых элементов соответствующих матриц для синтеза цифровых многосвязных систем управления. Приведены результаты моделирования с использованием прикладного пакета Matlab/Simulink.*

***Ключевые слова:** качество синтеза, векторно-матричные уравнения, размерность матриц, многосвязные цифровые системы.*

***Summary.** Considered the problem of ensuring high quality synthesis of control systems described with vector-matrix equations. Proposed to generalize conditions of*

choosing the roots of the characteristic equation and dimensionality of the zero elements of the corresponding matrices for synthesis of digital multiconnectional control systems. Shown results of modeling using Matlab / Simulink application package.

Key words: *synthesis quality, vector-matrix equations, matrix dimensionality, digital multiconnectional systems.*

Вступ. Як відомо, під терміном «багатозв'язні» розуміють системи з r входами та l виходами, які впливають один на одного, що приводить до взаємної залежності каналів керування. Для аналізу та синтезу таких систем в багатьох випадках використовують метод простору станів [1], де динаміка цифрової системи описується рівняннями виду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

де \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} і \mathbf{D} – матриці відповідних розмірностей.

На теперішній час існує багато прикладів синтезу цифрових систем керування з використанням методу простору станів для систем з одним входом та одним виходом та різних модифікацій методу з використанням зворотнього зв'язку за станом. Задача синтезу ускладнюється, коли розглядаються питання створення багатозв'язних систем з забезпеченням високої якості керування.

Основна частина. Для вирішення задачі синтезу розглядається цифрова система керування, яка описується рівняннями (1), де у загальному вигляді матрицями мають вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix} \quad (2)$$

При цьому задачею синтезу багатовимірних систем керування є не тільки розташування коренів у наперед задане положення, але й нейтралізація перехресних зв'язків у багатозв'язному об'єкті керування.

Нейтралізація перехресних зв'язків у багатозв'язному об'єкті керування у літературі отримала назву «розв'язання каналів». Необхідно виконати синтез цифрової системи управління, при якому:

- вихідний сигнал при $n \rightarrow \infty$ дорівнював би вхідній дії,
- перехідний процес замкнутої системи відповідав би бажаним показникам якості: скорочення часу регулювання, нульова похибка в усталеному режимі та нульове перерегулювання,
- виконується умова повної керованості та спостережуваності,
- моделювання досліджуваної системи виконується за допомогою пакету Matlab/Simulink [2] наступної схеми:

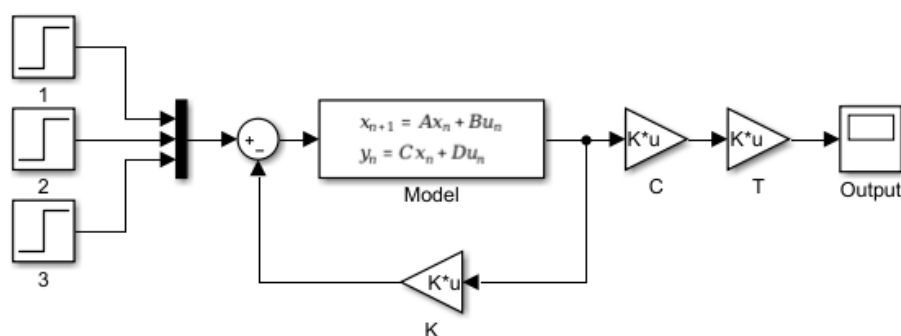


Рис.1. Схема моделі системи третього порядку з регулятором зворотного зв'язку за станом

Джерело: авторська розробка.

Для розрахунку коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом використовуємо формулу розрахунку, запропоновану в [3].

$$K = [CB]^{-1}[CA - TC], \quad (3)$$

де **T** – матриця з діагональними елементами, які є коренями бажаного характеристичного рівняння.

В якості прикладу розглянемо багатозв'язну цифрову систему керування з відповідними матрицями (4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 98 & -1 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 14 & -2 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & -0.2 \\ 122 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 9 \end{bmatrix} & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Виконаємо серію досліджень використовуючи (3) для визначення першої умови можливості виконання синтезу з означеною якістю цифрової системи, а саме, *умови вибору коренів бажаного характеристичного рівняння*.

Пропонується обирати корені кратними та різними. Результати дослідження представлені у таблиці 1.

Таблиця 1.

Вплив коренів на показники якості цифрової системи.

№	K1	K2	K3	Стійкість	Перерегулювання	Помилка регулювання	Час перехідного процесу
1	0.1	0.1	0.1	так	0	0	0.2
2	0.2	0.2	0.2	так	0	0	0.2
3	0.3	0.3	0.3	так	0	0	0.3
4	0.4	0.4	0.4	так	0	0	0.4
5	0.5	0.5	0.5	так	0	0	0.5
10	0.1	0.11	0.12	так	0	-0.68 1.3 -1.955	1.2,0.2,0.2
11	0.3	0.4	0.5	так	0	-2.25 3.6 -4.69	1.7,1.2,0.2
12	0.01	0.02	0.03	так	0	-6.76 7.2 -7.815	1.1,1.1,0.1

Таким чином, як видно з отриманих результатів, хоча різні корені і забезпечують стійкість системи та нульове перерегулювання, але спостерігається достатньо велика помилка. Для забезпечення заданої якості синтезу багатозв'язної цифрової системи необхідно обирати кратні корені характеристичного рівняння.

В якості наступного прикладу будемо розглядати систему з неквадратними матрицями **B** та **C**.

Пропонуємо для виконання вимог синтезу та визначення другої умови, а саме, умови вибору розмірності нульових елементів відповідних матриць, використовувати наступну модель:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{Ч} & \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} & \text{Ч} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} \\ \text{Ч} & \text{Ч} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{Ч} & \text{Ч} & 0 \\ \text{Ч} & \text{Ч} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В моделі (5) літерою «Ч» відмічені позиції, де може бути будь-яке за величиною та знаком число. В якості прикладу розглянемо багатозв'язну цифрову систему керування з матрицями:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.3 & 3 & 0.1 \\ -0.1 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & -0.1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Перевіримо керованість заданої системи, оцінивши ранг матриці керованості (рис.2).

```
>> P = ctrb(A1,B1)

P =

    2.0000    3.0000   -3.5000    5.2000    2.0400   -4.9700
   -1.0000    2.0000    0.3000   -1.3000    0.2000    0.1300
    1.0000    1.0000    0.9000    4.9000   -3.2900    3.4100

>> rank(P)

ans =

    3
```

Рис.2. Матриця керованості та її ранг

Джерело: авторська розробка.

Система є керованою, оскільки ранг матриці керованості рівний порядку системи, розраховуємо матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку (рис.3) та виконаємо моделювання досліджуваної системи.

```
>> K1 = inv(C1*B1)*(C1*A1 - T1*C1)

K1 =

   -0.0714    1.1143    0.0286
   -0.0857    0.2571    0.0143
```

Рис.3. Матриця регулятора зворотного зв'язку за станом

Джерело: авторська розробка.

Графіки перехідних процесів представлені на (рис.4).

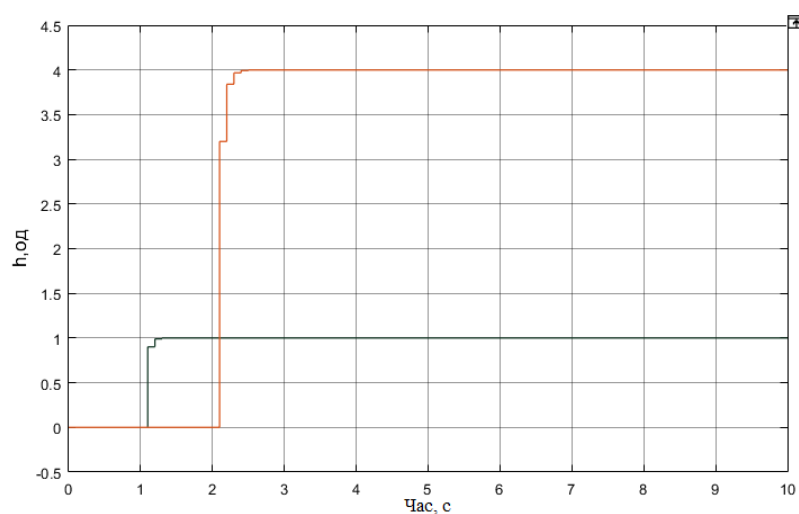


Рис.4. Перехідні процеси

Джерело: авторська розробка.

Як видно з графіків перехідних процесів, синтезована багатозв'язна цифрова система забезпечує високу якість керування.

Висновки. Таким чином, у статті запропоновано узагальнення умов для виконання синтезу заданої якості цифрових багатозв'язних систем керування: умови вибору коренів характеристичного рівняння та умови вибору розмірності нульових елементів відповідних матриць.

Проведені серії експериментальних досліджень показали, що узагальнення умов дозволило синтезувати цифрові багатозв'язні системи з високою якістю не тільки зі стандартними, ай з неквадратними матрицями

Література

1. Arie Nakhmani. Modern Control: State-Space analysis and design metod / McGraw – Hill Education. 2020.
2. Дьяконов В.П. VisSim+Mathcad+Matlab. Визуальное математическое моделирование/ В.П. Дьяконов – СОЛОН – Пресс.Москва, 2010.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления: Пер. с англ. / Р. Изерман. – Москва: Мир, 1984. – 541 с.

ДОДАТОК В.

Текст опублікованих тез з конференції «Summer InfoCom Advanced Solutions 2021»

Синтез багатовимірних систем керування з неквадратними матрицями

Репнікова Наталія Борисівна
НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського
Київ, Україна
n.repnikova@gmail.com

Гнип Владислав Віталійович
НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського
Київ, Україна
vladyslavgnyp@gmail.com

Анотація: В роботі запропоновано розширення можливостей синтезу структур лінійних багатовимірних систем з неквадратними матрицями на базі формули Р.Ізермана. Розглядаються цифрові системи керування, що описуються моделями простору станів.

Показано, що виконання умови коректності вибору розмірностей матриць рівнянь стану і виходу, дозволяє для досліджуваного класу систем, отримати результати синтезу з заданими показниками якості.

Виконано моделювання цифрової системи з неквадратними матрицями з використанням прикладного пакету MATLAB/Simulink.

Ключові слова: цифрові системи, багатовимірні системи, підвищення якості, цифровий регулятор станів, модель простору станів, неквадратні матриці, моделі MatLab.

ВСТУП

На теперішній час опубліковано цілий ряд робіт, які розглядають теоретичні питання аналізу та синтезу цифрових систем на базі методу простору станів. Як відомо, при використанні зазначеного методу, динаміка систем описується диференційними рівняннями стану та виходу виду:

$$\begin{aligned}x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n] \\ y[n] &= Cx[n] + Du[n]\end{aligned}\quad (1)$$

де A, B, C і D – матриці відповідних розмірностей.

Хоча кожна досліджувана модель має свої особливості, при виконанні синтезу, всі вони об'єднуються головним змістом, а саме створенням зворотнього зв'язку за станом, який забезпечує задане розташування полюсів замкнутої системи. При цьому вираз для керуючого впливу має вигляд:

$$u[n] = -Kx[n], \quad (2)$$

де K – матриця зворотних зв'язків за станом.

Слід зазначити, що теоретичне обґрунтування задач синтезу моделей з одним входом та одним виходом широко представлені у літературі [1]. Для багатовимірних систем існує поняття автономних та багатозв'язних систем [2]. Якщо для перших є достатня кількість прикладів вирішення задач синтезу, то для багатозв'язних систем іноді дослідникам

доводиться виконувати авторське теоретичне обґрунтування запропонованих рішень.

В роботі розглядаються питання синтезу багатозв'язної цифрової системи на базі відомої формули Р.Ізермана. При цьому задача ускладнюється вибором неквадратних матричних структур.

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

У відповідності до формули Р.Ізермана [3], матриця зворотніх зв'язків за станом розраховується як

$$K = [CB]^{-1}[CA - TC], \quad (3)$$

де T – матриця власних значень системи.

Запишемо вираз (3) через розмірності матриць в загальному вигляді для визначення результуючої розмірності матриці K .

$$\begin{aligned}K &= [(l \times n)(n \times r)]^{-1} [(l \times n)(n \times n) - (l \times l)(l \times n)] = \\ &= [(l \times r)]^{-1} [(l \times n) - (l \times n)] = (r \times l)(l \times n) = (r \times n).\end{aligned}\quad (4)$$

Для забезпечення заданих показників якості використовуємо формулу визначення корегуючих коефіцієнтів.

$$K^* = T^{-1} K_h^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-z_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-z_2} \end{bmatrix}^{-1} E \quad (5)$$

$$K_h = \begin{bmatrix} k_{h11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{h22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{hrr} \end{bmatrix} \quad k_{hij} = c_{ii} b_{jj} \quad i=1, 2..l; j=1, 2..r \quad (6)$$

Де z_1, z_2 – бажані корені.

Підставивши в формулу (5) розмірності відповідних матриць, визначимо умову коректності вибору розмірностей для можливості проведення синтезу багатозв'язної цифрової системи з неквадратними матрицями:

$$\begin{aligned}K^* &= (l \times l)^{-1} (l \times r)^{-1} (l \times l)^{-1} (l \times l) = \\ &= (l \times l)(r \times l)(l \times l)(l \times l).\end{aligned}\quad (7)$$

Таким чином, відповідно до виразу (7), використати метод синтезу для неквадратних матриць можна лише у випадку коли $r = l$.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для векторно-матричної моделі, яка описує динаміку цифрової багатовимірної системи з відповідними матрицями виду (8).

$$A = \begin{bmatrix} -0,3 & 3 & -1 \\ -0,1 & -0,5 & 0 \\ 0,3 & -0,7 & -0,1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Виконаємо синтез регулятора, який буде забезпечувати нульове перерегулювання, нульову усталену помилку та скорочення часу керування. В системі діють два вхідні впливи, відповідно 1 та 4.

Моделювання виконується за допомогою пакету MATLAB/Simulink.

На Рис.1 представлені графіки перехідних процесів вихідної системи за двома виходами.

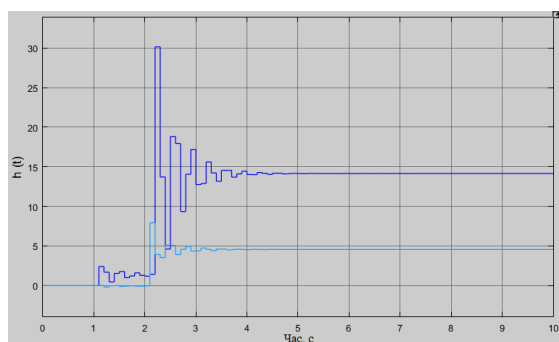


Рис.1. Графік перехідних процесів вихідної системи

Як видно з графіків, кожен стан системи впливає на інший, присутні велике перерегулювання та усталена помилка керування.

З урахуванням умови коректності вибору розмірностей матриць формул (1), (3) розраховуємо матрицю коефіцієнтів спостерігаючого пристрою (9).

$$H = \begin{bmatrix} -0,25 & 3 \\ -0,0833 & -0,4 \\ 0,25 & -0,7 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Використовуючи (9) розраховуємо матриці моделі простору-станів спостерігаючого пристрою, на основі яких будується об'єднаний регулятор (11) за формулами (10).

$$\begin{aligned} A_p &= [A_{sp} - B * K] \\ B_p &= [B \ H] \\ C_p &= [-K] \\ D_p &= [E \ O] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} 0,4 & -3 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{bmatrix} \\ B_p &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -0,25 & 3 \\ 0 & 2 & -0,833 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0,25 & -0,7 \end{bmatrix} \\ C_p &= \begin{bmatrix} 0,2 & -1,5 & 0,5 \\ 0,05 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} \\ D_p &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

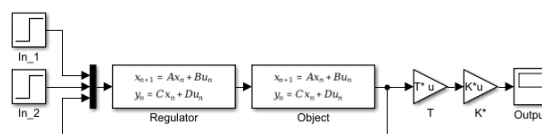


Рис.2. Структурна схема з об'єднаним регулятором.

Результати моделювання представлені на Рис.3.

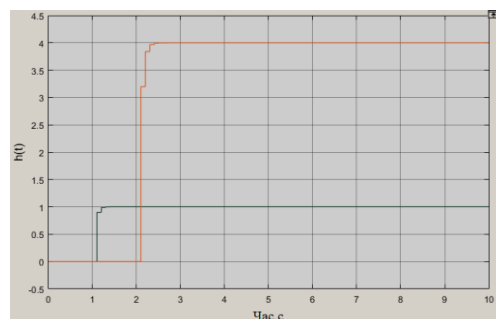


Рис.3. Перехідні процеси моделі з об'єднаним регулятором.

Як видно з графіків перехідного процесу, синтез регулятора забезпечує задану якість багатовимірній цифровій системі.

ВИСНОВКИ

Таким чином, у роботі виведена умова коректності вибору розмірностей відповідних матриць для забезпечення можливості проведення синтезу цифрової багатовимірної системи з неквадратними матрицями.

При цьому розширюється границя області використання формули Р.Ізермана для забезпечення розв'язання перехресних зв'язків за станом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Перевод с англ. – М.: Машиностроение, 1986, 448 с.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления Т.2 Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы/ Д.П. Ким – М.:Физматлит, 2007.-440 с.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления/ Пер. с англ.- М.: Мир, 1984, 541с.